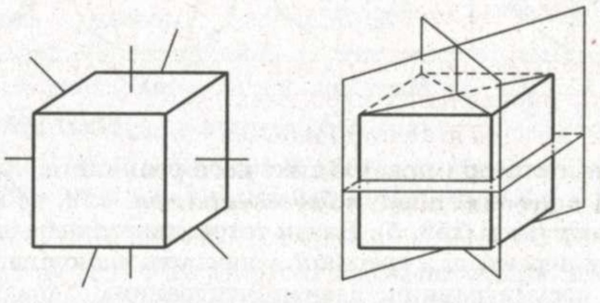
симетричними одна одній відносно точки (прямої чи площини) (мал. 161). Фігуру F називають симетричною відносно точки (прямої чи площини), якщо кожна її точка симетрична відносно точки (прямої чи площини) деякій точці цієї самої фігури. У цьому разі вважають також, що фігура F має центр симетрії (вісь симетрії чи площину симетрії).

Кожен правильний многогранник, крім тетраедра, має центр симетрії, а також кілька осей і кілька площин симетрії. Правильний тетраедр має 3 осі симетрії та 6 площин симетрії. Куб має 9 осей симетрії та 9 площин симетрії. Деякі з них зображені на малюнку 162.



Мал. 162

Форму куба мають кристали кухонної солі та деякі алмази. Інші алмази кристалізуються у формі правильних октаедрів. Кристали піриту (залізного колчедану) мають форму правильного додекаедра. Властивості правильних (і похідних від них) многогранників використовують також архітектори й будівельники, які створюють просторові конструкції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які многогранники називаються правильними?
2. Якими бувають правильні многогранники?
3. Що таке центр правильного многогранника?
4. Сформулюйте найважливіші властивості правильних многогранників.

Виконаємо разом

1. Учень пояснює: «Кожна призма – це многогранник, тому кожна правильна призма – це правильний многогранник. Так само і кожна правильна піраміда є правильним многогранником». Чи правильно це?

● **Розв'язання.** Ні. Якщо призма не чотирикутна, то її основа не дорівнює бічній грані. Такий многогранник не може бути правильним, бо не всі його грані рівні. З усіх призм тільки куб є правильним многогранником, а з усіх пірамід – тільки правильний тетраедр.

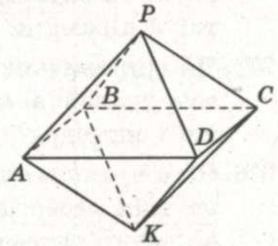
2. Чи може бути дев'ятикутник перерізом правильного октаедра?

● **Розв'язання.** Октаедр має 8 граней. Якщо січна площина перетинає навіть усі його грані, то в перерізі буде восьмикутник, а не дев'ятикутник.

Відповідь. Не може.

3. Доведіть, що протилежні грані правильного октаедра лежать у паралельних площинах.

● **Розв'язання.** Нехай $PABCDK$ – правильний октаедр (мал. 163). Усі його ребра і всі діагоналі рівні, тому чотирикутники $PBKD$ і $PAKC$ – квадрати. $PD \parallel BK$ і $PC \parallel AK$. Отже, дві пересічні прямі площини PDC відповідно паралельні двом прямим площини ABK, тому грані октаедра PDC і ABK лежать у паралельних площинах.



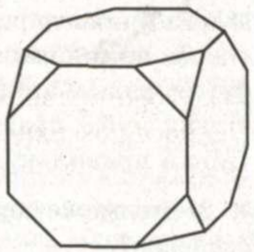
Мал. 163

Так само можна довести, що $PAD \parallel KCB$, $PAB \parallel KCD$ і $PBC \parallel KDA$.

Виконайте усно

966. Чи є правильним многогранником правильна піраміда?
967. Чи існує піраміда, яка є правильним многогранником? А призма?
968. Чи є правильним многогранник, що об'єднує два правильні тетраедри, які мають спільну основу?
969. Чому дорівнює плоский кут при вершині правильного гексаедра?
970. Площа грані правильного додекаедра дорівнює 10 см^2. Чому дорівнює його площа поверхні?
971. Площа поверхні правильного гексаедра – 54 см^2. Чому дорівнює довжина його ребра?

972. Від куба при його вершинах відрізали 8 рівних тетраедрів так, що утворився многогранник, грані якого – правильні трикутники й восьмикутники (мал. 164). Чи є утворена фігура правильним многогранником? Чому?



Мал. 164

973. З двох правильних тетраедрів склали шестигранник, усі грані якого – рівні правильні трикутники. Чи є цей многогранник правильним?

А

974. З яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр? Як відносяться сторона основи та висота такої піраміди?

975. Чи є правильним многогранник, вершини якого – центри всіх граней: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?

976. Чи є правильним многогранник, вершини якого – середини всіх ребер: а) куба; б) правильного тетраедра; в) правильного октаедра?

977. Знайдіть суму плоских кутів при вершині кожного правильного многогранника.

978. Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює: а) 12 см; б) 0,1 м.

979. Знайдіть довжину ребра правильного гексаедра, якщо площа його поверхні дорівнює: а) 726 см^2; б) 1,5 м^2.

980. Як зміниться площа поверхні правильного гексаедра, якщо його ребро, що дорівнює 5 см, збільшити: а) на 2 см; б) у 2 рази?

981. Чи може бути перерізом правильного гексаедра правильний: а) трикутник; б) чотирикутник? Виконайте відповідний малюнок.

982. Заповніть таблицю і за її даними перевірте твердження, сформульоване в теоремі Ейлера:

	Правильний тетраедр	Гексаедр (куб)	Октаедр	Додекаедр	Ікосаедр
Вершини					
Ребра					
Грані					

983. Намалюйте розгортку правильного октаедра з ребром завдовжки 2 см.

984. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні.

Б

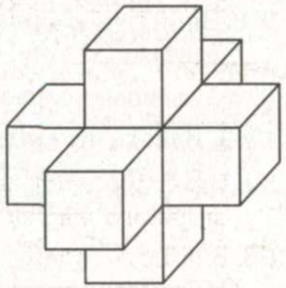
985. Відстань від центра правильного октаедра до його вершини дорівнює b. Знайдіть довжину його ребра.

986. Скільки осей симетрії та площин симетрії має правильний октаедр?

987. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу його перерізу площиною симетрії. Скільки розв'язків має задача?

988. Знайдіть площу поверхні правильного ікосаедра, ребро якого дорівнює 2 см.

989. Учень отримав завдання виготовити на виставку геометричних фігур многогранник, який складається із семи кубів (мал. 165). Як можна виготовити таку модель? Чому дорівнює площа її поверхні?



Мал. 165

990. Знайдіть ребро правильного октаедра, якщо площа його поверхні дорівнює $8\sqrt{3}$.

991. У скільки разів збільшиться площа поверхні правильного ікосаедра, якщо кожне його ребро збільшити в 3 рази?

992. Чи можна правильний тетраедр перерізати площиною так, щоб переріз був квадратом?

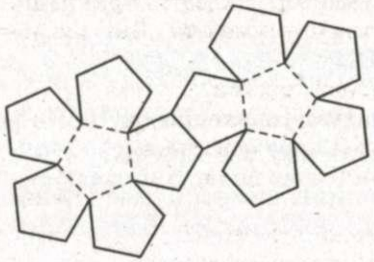
993. Чи можна куб перерізати площиною так, щоб перерізом був правильний: а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник?

994. Доведіть, що гранню правильного многогранника не може бути шестикутник. А семикутник?

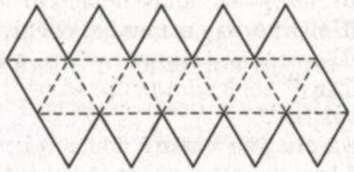
995. Під яким кутом із центра куба видно його ребро? А з центра правильного октаедра?

996. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки куба до всіх його граней є сталою для даного куба.

997. Практичне завдання. Використовуючи малюнки 166 і 167, побудуйте на цупкому папері розгортки правильних додекаедра та ікосаедра. Додайте припуски для склеювання і виготовте відповідні моделі.



Мал. 166



Мал. 167

Вправи для повторення

998. Знайдіть координати точок, у яких площина, задана рівнянням $x - 2y + 4z - 12 = 0$, перетинає координатні осі.

999. Установіть вид ΔABC, якщо $A(1; -1; 2)$, $B(0; 2; -1)$, $C(2; 1; -1)$.

1000. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи – 288 см^2. На якій відстані від основи потрібно провести переріз, паралельний основі, щоб його площа дорівнювала 32 см^2?

Самостійна робота № 7

Варіант 1

1. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть: а) площу поверхні призми; б) довжину її діагоналі.

2. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

Варіант 2

1. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть: а) площу поверхні піраміди; б) її висоту.

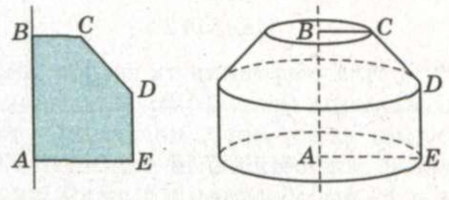
2. Знайдіть площу поверхні правильного гексаедра, ребро якого дорівнює a.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Як можна класифікувати геометричні фігури?
2. Сформулюйте означення многогранника. Назвіть його елементи.
3. Які многогранники називають опуклими? Наведіть приклади.
4. Дайте означення призми. Назвіть її елементи. Які бувають призми?
5. Як знайти площу поверхні правильної призми?
6. Що таке паралелепіпед? Які бувають паралелепіпеди?
7. Сформулюйте властивість діагоналей паралелепіпеда.
8. Дайте означення піраміди. Назвіть її елементи. Які бувають піраміди?
9. Як знайти площу поверхні правильної піраміди?
10. Сформулюйте означення правильного многогранника.
11. Назвіть усі види правильних многогранників.

§ 31. Тіла обертання

Уявіть, що плоский многокутник $ABCDE$ обертається навколо нерухомої прямої AB (мал. 168, *а*). Якщо він зробить повний оберт, то кожна його точка, яка не лежить на AB, опише коло з центром на цій прямій. А весь даний многокутник, обертаючись навколо прямої AB, опише деяке *тіло обертання*. Пряма AB – *вісь* цього тіла обертання (мал. 168, *б*).

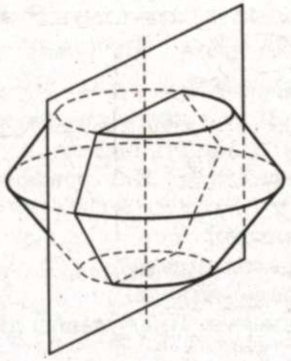


а) б)

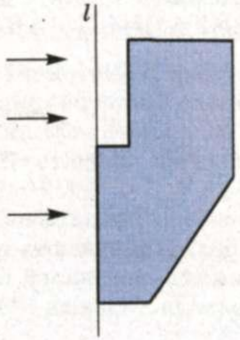
Мал. 168

Площина, яка проходить через вісь тіла обертання, поділяє його на дві рівні частини. Утворений переріз називають *осьовим перерізом* (мал. 169). Січна площина, перпендикулярна до осі тіла обертання, перетинає його по кругу, або по кільцю, або по кількох кільцях, які мають спільний центр (мал. 170).

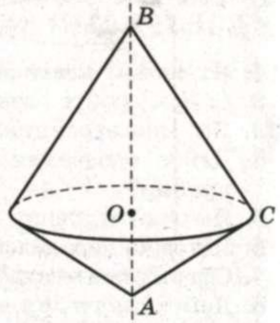
Щоб задати тіло обертання, досить указати його вісь і фігуру, обертанням якої утворене це тіло. Замість осі часто вказують відрізок, що їй належить. Наприклад, можна сказати так: тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи (мал. 171).



Мал. 169

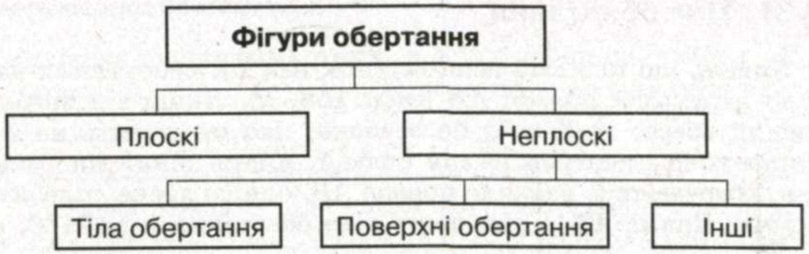


Мал. 170



Мал. 171

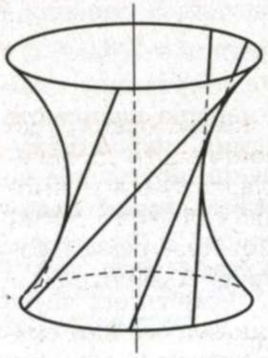
Приклади матеріальних моделей тіл обертання: лінза, котушка, хокейна шайба, колба, пробірка, макітра, снаряд. А от болт, гайка, свердло – не є тілами обертання.



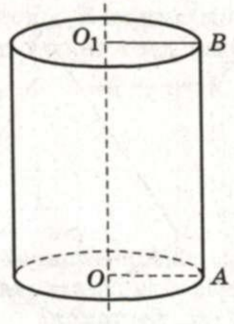
Мал. 172

Слід розрізняти тіла обертання та *фігури обертання*. Останнє поняття – загальніше (мал. 172). Приклади фігур обертання, які не є тілами: коло, круг, поверхня, утворена обертанням прямої навколо мимобіжної їй осі (мал. 173), тощо.

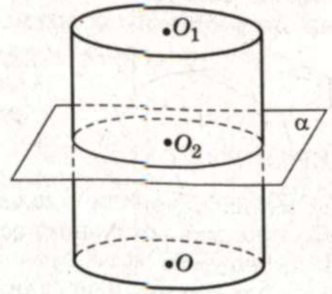
Найпростішим тілом обертання є циліндр. *Циліндром* називають тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Якщо прямокутник $OABO_1$ обертати навколо сторони OO_1, то його сторони OA і O_1B опишуть рівні круги, які називають *основами* циліндра (мал. 174). Сторона AB опише *бічну поверхню* циліндра. Кожен відрізок цієї поверхні, який дорівнює AB, – *твірна* циліндра. Усі твірні циліндра рівні та паралельні одна одній, бо кожна з них дорівнює AB і паралельна осі обертання. Довжина твірної є *висотою* циліндра.



Мал. 173

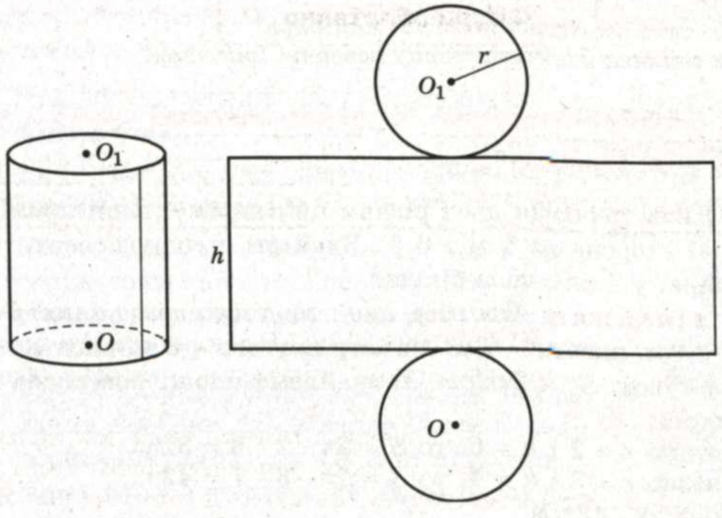


Мал. 174



Мал. 175

Усі осьові перерізи циліндра – рівні прямокутники. Кожна січна площина, паралельна осі циліндра, перетинає його по прямокутнику. Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по кругу, що дорівнює основі циліндра (мал. 175).



Мал. 176

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і по одній з твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 176). Вона складається з прямокутника – розгортки бічної поверхні – та двох рівних кругів. Якщо радіус основи циліндра дорівнює r (його називають радіусом циліндра), а висота – h, то його бічна поверхня розгортається в прямокутник зі сторонами $2\pi r$ і h. Площа цієї розгортки є площею бічної поверхні циліндра:

$$S_б = 2\pi rh.$$

Щоб знайти всю площу поверхні циліндра $S_ц$, досить до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ:

$$S_ц = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ або } S_ц = 2\pi r(r + h).$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як можна утворити тіло обертання?
2. Що таке вісь обертання; осьовий переріз тіла обертання?
3. Якою фігурою може бути осьовий переріз тіла обертання? А переріз площиною, перпендикулярною до осі обертання?
4. Як пов'язані між собою фігури обертання і тілá обертання? Покажіть на діаграмі.
5. Що таке циліндр? Назвіть його елементи.
6. Якою фігурою є осьовий переріз циліндра?
7. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, перпендикулярною до його осі?
8. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його осі?
9. Що таке розгортка поверхні циліндра?
10. Як можна визначати площу поверхні циліндра?

Виконаємо разом

1. Осьові перерізи двох різних циліндрів – рівні прямокутники зі сторонами 4 м і 6 м. Знайдіть площу поверхні того циліндра, у якого вона більша.

● **Розв'язання.** Йдеться про два циліндри: діаметр першого – 4 м, висота – 6 м; діаметр другого – 6 м, висота – 4 м. За формулою $S_ц = 2\pi r(r + h)$ знайдемо площі поверхонь обох циліндрів:

1) якщо $r = 2$ і $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;
2) якщо $r = 3$ і $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$.

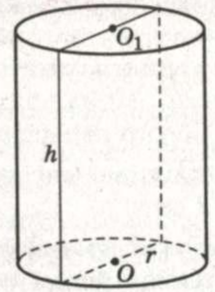
Відповідь. 42π м^2.

2. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

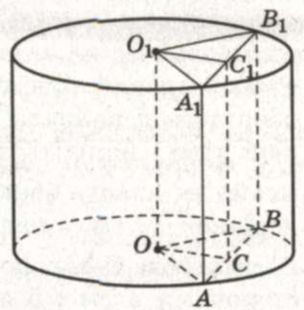
● **Розв'язання.** Нехай радіус основи циліндра дорівнює r, а висота – h (мал. 177). Тоді площа осьового перерізу циліндра $Q = 2rh$, а площа його бічної поверхні $S_б = 2\pi rh = \pi \cdot 2rh = \pi Q$.

Відповідь. πQ.

3. Циліндр радіусом 10 і висотою 5 перетинається площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від неї на 1. Знайдіть площу і периметр перерізу.



Мал. 177



Мал. 178

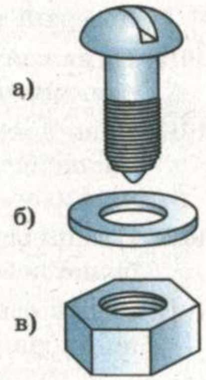
● **Розв'язання.** Нехай переріз ABB_1A_1 циліндра віддалений від осі OO_1 на $OC = 1$ (мал. 178).

Тоді $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{10 - 1} = 3.$

Шукана площа перерізу $S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, а периметр перерізу $P = 2(AA_1 + AB) = 2(5 + 6) = 22$.

Виконайте усно

1001. Назвіть приклади фігур обертання з навколишнього середовища.
1002. Які з наведених на малюнку 179 фігур є тілами обертання.
1003. Що за фігура утвориться під час обертання точки навколо прямої, яка: а) не проходить через дану точку; б) проходить через дану точку?
1004. Що за фігура утвориться під час обертання відрізка AB навколо прямої, яка перпендикулярна до AB і: а) проходить через одну з точок A чи B; б) не перетинає відрізок AB; в) перетинає відрізок AB у точці C?



Мал. 179

1005. Скільки існує площин, які розтинають циліндр: а) на два рівні циліндри; б) на дві рівні фігури? Чи є ці площини площинами симетрії циліндра?
1006. Скільки осей симетрії має циліндр? Чи має циліндр центр симетрії?
1007. Яка фігура буде осьовим перерізом тіла, утвореного під час обертання правильної чотирикутної піраміди навколо висоти?

А

1008. Рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 2 см обертається навколо одного з катетів. Намалюйте утворене тіло і знайдіть площу його осьового перерізу.

1009. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 10 см, а радіус основи – 2 см.

1010. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

1011. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут 45°. Як відноситься висота циліндра до радіуса основи?

1012. Радіус циліндра – 5 м, а діагональ осьового перерізу – 26 м. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) площу осьового перерізу; в) площу бічної поверхні; г) площу поверхні циліндра.

1013. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 м і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть: а) висоту циліндра; б) радіус циліндра; в) площу бічної поверхні циліндра.

1014. Намалюйте тіло, утворене обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони.

1015. Дано прямокутник з нерівними сторонами. Доведіть, що площі бічних поверхонь циліндрів, утворених обертанням цього прямокутника навколо нерівних сторін, рівні.

1016. Площа осьового перерізу циліндра – S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

1017. Радіус основи циліндра – r, а висота – h. Знайдіть довжину діагоналі осьового перерізу циліндра.

Б

1018. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус – r, а твірну з центра основи видно під кутом α.

1019. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α.

1020. Як відносяться площі перерізів циліндра площинами, які проходять через твірну, якщо кут між цими площинами дорівнює 30°, а одна з них проходить через вісь циліндра?

1021. Доведіть, що площина, яка проходить через твірну циліндра, але не дотикається до нього, перетинає циліндр по прямокутнику.

1022. Висота циліндра дорівнює 16 см, радіус – 10 см. Знайдіть площу його перерізу площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від осі на 60 мм.

1023. Радіус циліндра – r, а висота – h. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна до основи і відтинає від кола основи дугу 60°.

1024. Площа поверхні та площа бічної поверхні циліндра дорівнюють відповідно 50 см^2 і 30 см^2. Знайдіть висоту циліндра.

1025. З квадрата, площа якого – Q, згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

1026. Тор – це тіло, утворене обертанням круга навколо прямої, яка лежить у площині цього круга, але не перетинає його. Намалюйте тор.

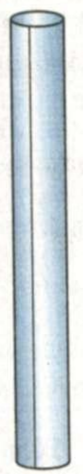
1027. Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи – 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з 15 000 м^2, якщо 10 % матеріалу йде на відходи?

1028. Діаметр циліндричного парового котла завдовжки 3,8 м дорівнює 0,8 м. Знайдіть тиск пари на повну поверхню котла, якщо на 1 см^2 пара давить із силою 10 кГ.

1029. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення ринви (мал. 180) завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 3 % її площі?

1030. Чи вистачить 8500 м^2 ізоляційної стрічки для дворазового покриття нею кілометра газопроводу діаметром 1420 мм?

1031. Практичне завдання. Зробіть із цупкого паперу розгортку циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 16 см.



Мал. 180

Вправи для повторення

1032. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом 60°. Менший діагональний переріз призми має площу S. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

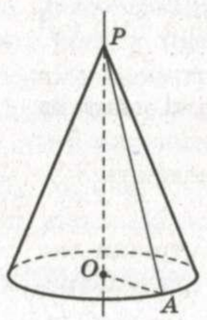
1033. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема – 13 см. Обчисліть площу поверхні піраміди.

1034. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ.

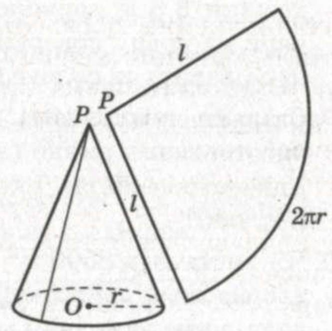
§ 32. Конуси

Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.

Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO, то його гіпотенуза PA опише бічну поверхню, а катет OA – основу конуса (мал. 181). Точку P, відрізок PO та пряму PO називають відповідно *вершиною*, *висотою* і *віссю конуса*. Усі осьові перерізи конуса – рівні рівнобедрені трикутники. Кожна площина, яка проходить через вісь конуса, є площиною його симетрії. Центра симетрії конус не має.



Мал. 181



Мал. 182

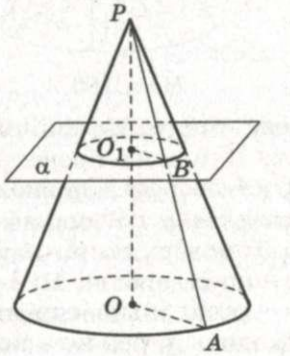
Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, називають *твірною конуса*. Усі твірні конуса рівні. Якщо бічну поверхню конуса розрізати по якій-небудь твірній і розгорнути на площині, то дістанемо її *розгортку*. Розгортка бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює r, а твірна – l, є сектором круга радіуса l (мал. 182). Довжина його дуги – $2\pi r$. Площу такої розгортки

приймають за *площу бічної поверхні конуса*. Вона в стільки разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів $2\pi r$ менше за $2\pi l$. Тому $S_{б.к} : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l$, звідки $S_{б.к} = \pi r l$.

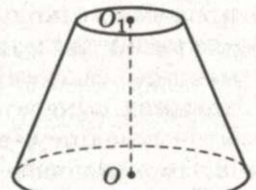
Щоб знайти всю площу поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи: $S_к = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l)$. Отже,

$$S_к = \pi r(r + l).$$

Січна площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу (мал. 183). Оскільки $\Delta POA \sim \Delta PO_1B$, то $OA : O_1B = PO : PO_1$, звідки $\pi OA^2 : \pi O_1B^2 = PO^2 : PO_1^{\,2}$, тобто *площі основи конуса і паралельного їй перерізу відносяться як квадрати їх відстаней від вершини конуса.*



Мал. 183



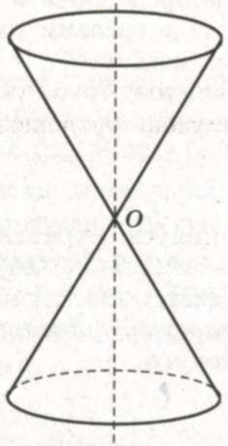
Мал. 184

Січна площина, паралельна основі конуса, поділяє його на два тіла обертання: менший конус і *зрізаний конус*. Зрізаний конус обмежений двома кругами – його основами – та бічною поверхнею (мал. 184). Відстань між основами – висота зрізаного конуса.

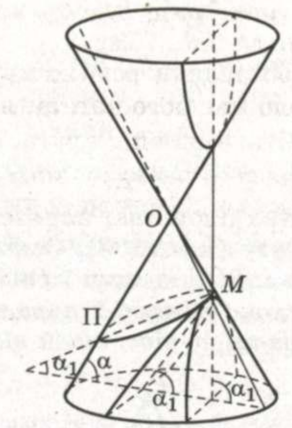
Примітка. Зрізаний конус – не конус, бо не відповідає означенню конуса. Те саме стосується і зрізаної піраміди. Тому неправильно говорити, що конуси (або піраміди) бувають повні і зрізані.

Форму конусів мають насипані на горизонтальну поверхню купи піску, зерна, вугілля, щебеню тощо. Кожному такому матеріалу відповідає певний *кут природного укосу* – кут нахилу твірної до площини основ конуса. Для піску він дорівнює приблизно 30°, для вугілля – 42°.

Варте уваги питання про перерізи конічної поверхні. *Конічною поверхнею* вважають фігуру (не тіло!), утворену обертанням однієї з пересічних прямих навколо другої. Конічна поверхня вважається необмеженою і складається з двох рівних частин, які мають одну спільну точку – вершину O



Мал. 185



Мал. 186

(мал. 185). Уявімо, що через деяку точку M конічної поверхні проведено січну площину ω. Її можна провести так, щоб позначений на малюнку 186 кут α_1: а) дорівнював α; б) був меншим за α; в) був більшим за α. У першому випадку площина ω перетинає конічну поверхню по параболі, в другому – по еліпсу, в третьому – по гіперболі. Ці три математичні терміни ввів ще в II ст. до н. е. давньогрецький математик Аполлоній. Грецькою мовою ці слова означали: парабола – зіставлення (бо з першим випадком зіставлялися два інші), еліпс – недостача (бо кут α_1 менший за α), гіпербола – перебільшення (бо кут α_1 більший за α). Хоч Аполлоній зіставляв не кути α_1 і α, а деякі інші величини, але суть справи зводилася до порівнювання цих кутів.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення конуса.
2. Що таке вершина; основа; твірна; вісь; висота конуса?
3. Якою фігурою є осьовий переріз конуса? А переріз конуса площиною, перпендикулярною до його осі?
4. Як можна утворити розгортку конуса?
5. Як можна обчислити площу бічної поверхні конуса? А площу поверхні конуса?
6. Що таке зрізаний конус? Чи є зрізаний конус конусом?
7. Назвіть елементи зрізаного конуса.
8. Якою фігурою є осьовий переріз зрізаного конуса? А переріз зрізаного конуса площиною, перпендикулярною до його осі?

Виконаємо разом

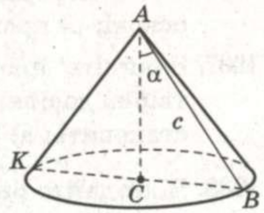
1. Конус утворено обертанням прямокутного трикутника навколо меншого катета, який з гіпотенузою c утворює кут α. Знайдіть: а) площу круга, описаного більшим катетом; б) площу осьового перерізу конуса.

● **Розв'язання.** Нехай у трикутнику ABC (мал. 187) $AC \perp BC$, $AB = c$ і $\angle CAB = \alpha$. Осьовий переріз даного тіла – рівнобедрений $\triangle ABK$, у якого висота $AC = c\cos\alpha$, половина основи $CB = c\sin\alpha$. Площа осьового перерізу

$$S_{ABK} = CB \cdot AC = c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha = c^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Площа круга радіуса CB

$$S_{CB} = \pi CB^2 = \pi c^2\sin^2\alpha.$$



Мал. 187

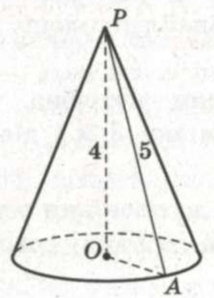
2. Твірна конуса – 5 см, висота – 4 см. Знайдіть відношення площі поверхні цього конуса до площі його основи.

● **Розв'язання.** Трикутник POA прямокутний (мал. 188). Тому радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

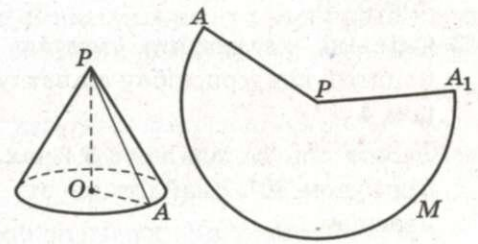
Площа основи $S_о = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$;

площа поверхні $S_к = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi$.

Отже, $S_к : S_о = 24\pi : 9\pi = 8 : 3$.



Мал. 188



Мал. 189

3. Висота конуса – 4, твірна – 5. Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

● **Розв'язання.** Радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (мал. 189). Тому довжина кола його основи $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Така сама довжина дуги сектора AMA_1. Ця довжина в стільки разів менша за довжину кола радіуса $PA = 5$, у скільки разів шуканий кут φ сектора менший за 360°. Отже, $\varphi : 360° = 6\pi : 10\pi$, звідки $\varphi = 216°$.

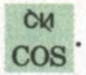
Відповідь. 216°.

Виконайте усно

1035. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму конуса або зрізаного конуса.

1036. Що є перерізом конуса площиною, яка: а) паралельна основі; б) проходить через вершину під кутом до основи.

1037. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його твірна дорівнює 8 м, а кут при вершині осьового перерізу становить: а) 90°; б) 30°.

1038. Відгадайте ребус: 

.

А

1039. Висота конуса – 8 м, радіус основи – 6 м. Знайдіть довжину твірної.

1040. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник зі стороною 10 см. Знайдіть радіус основи та висоту конуса.

1041. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

1042. Твірна конуса – 5 см, висота – 4 см. Знайдіть площу його поверхні.

1043. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку заввишки 3 м і діаметром 4 м?

1044. Твірна конуса дорівнює 8 і нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту конуса та площу осьового перерізу.

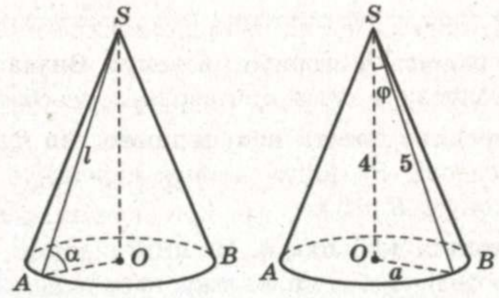
1045. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть: а) висоту конуса; б) радіус основи; в) площу осьового перерізу; г) площу поверхні конуса.

1046. Знайдіть площу бічної поверхні конуса радіуса R, осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник.

1047. Різниця між довжиною твірної та висотою конуса дорівнює 2 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

1048. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 15π см^2, а площа поверхні – 24π см^2.

1049. Користуючись малюнком 190, сформулюйте і розв'яжіть якомога більше задач.



а) б)

Мал. 190

Б

1050. Знайдіть площу поверхні конуса, висота якого дорівнює 12 см, а відстань від основи висоти до середини твірної – 6,5 см.

1051. Висота конуса дорівнює 2 см, а радіус основи – 4 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу 60°.

1052. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 60°, проведено площину, що утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту конуса, якщо площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ см^2.

1053. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через його вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

1054. Задача для кмітливих. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса, які проходять через його вершину, найбільшу площу має осьовий переріз?

1055. За даними в таблиці елементами знайдіть інші елементи конуса, де C – довжина кола, d – діаметр основи, H – висота, l – твірна конуса, α – кут нахилу твірної до основи, S – площа основи, Q – площа осьового перерізу. Перед розв'язанням задачі зробіть на дошці малюнок, повторіть і запишіть формули.

№	C	d	H	l	α	S	Q
1	C		H				
2	C			l			
3		d			α		
4					α	S	
5					α		Q

1056. Півкруг радіуса R згорнули в конус. Визначте: а) радіус основи конуса; б) кут α при вершині осьового перерізу.

1057. Через середину висоти конуса проведено площину паралельно основі. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса $R = 2$ см.

1058. Висота конуса дорівнює h. На якій відстані від його вершини проведено січну площину, паралельну основі, якщо площа перерізу вдвічі менша за площу основи?

1059. Площа основи конуса – Q, а площа бічної поверхні – $2Q$. Під яким кутом його твірна нахилена до площини основи?

1060. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см навколо: а) меншого катета; б) більшого катета; в) гіпотенузи.

1061. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a навколо: а) катета; б) гіпотенузи; в) прямої, проведеної через вершину прямого кута паралельно гіпотенузі.

1062. Практичне завдання. Виготовте з цупкого паперу розгортки конуса і зрізаного конуса.

Вправи для повторення

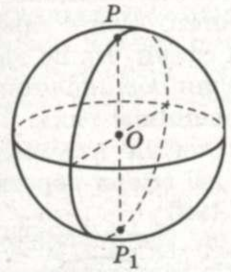
1063. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а двогранний кут при ребрі основи – 60°. Знайдіть: а) сторону основи піраміди; б) площу поверхні.

1064. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, площа якого становить 48 см^2. Площа основи циліндра дорівнює 36π см^2. Обчисліть висоту циліндра.

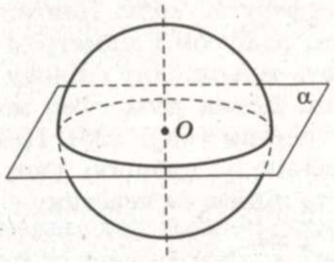
1065. Знайдіть довжини медіан трикутника з вершинами в точках $A(2; 4; 6)$, $B(-2; 4; 6)$ і $C(2; 4; -6)$.

§ 33. Куля і сфера

Кулею називають тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра (мал. 191). Центр круга, обертанням якого утворено кулю, називають *центром* цієї кулі. Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через її центр, – *діаметр* кулі. Він дорівнює двом радіусам.



Мал. 191

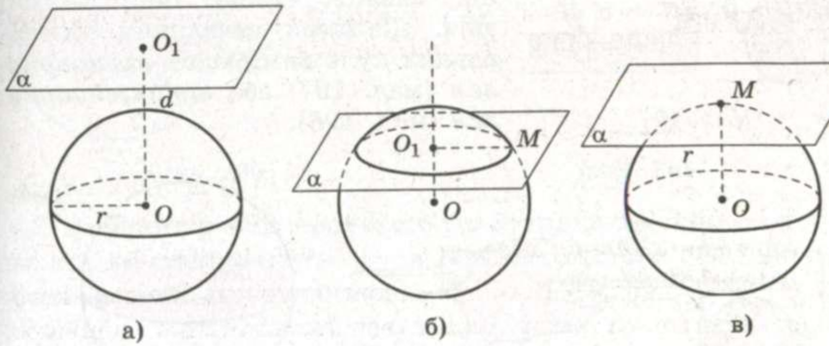


Мал. 192

Кожна площина, яка проходить через центр кулі, поділяє її на дві рівні *півкулі* і є площиною симетрії кулі. Вона перетинає кулю по *великому кругу*, а поверхню кулі – по *колу великого круга* (мал. 192).

Як можуть розміщуватись у просторі куля і площина? Нехай відстань від центра кулі до площини дорівнює d, а радіус кулі – r. Можливі такі три випадки (мал. 193).

1. Якщо $r < d$, то площина і куля не мають спільних точок (мал. 193, *а*).

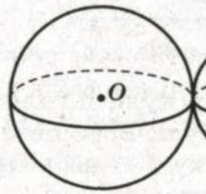


Мал. 193

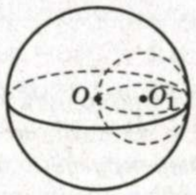
2. Якщо $r > d$, то площина перетинає кулю по кругу радіуса $O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}$. З цієї формули випливає, що переріз кулі тим більший, чим менше d (мал. 193, *б*).

3. Якщо $r = d$, то площина і куля мають тільки одну спільну точку (мал. 193, *в*). У цьому разі говорять, що площина *дотикається* до кулі, а їх спільну точку називають *точкою дотику*. Пряму, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною до кулі*. Пряма і площина, дотичні до кулі, перпендикулярні до радіуса, проведеного в точку дотику.

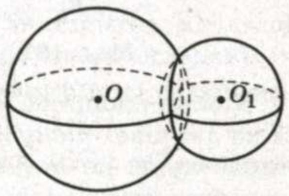
Поверхню кулі називають *сферою*. Січна площина перетинає сферу по колу. Центр, радіус і діаметр кулі є також центром, радіусом і діаметром відповідної сфери. Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, то вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох сфер може бути зовнішнім (мал. 194) або внутрішнім (мал. 195). Ці випадки аналогічні взаємному розміщенню на площині двох кіл. Якщо дві сфери перетинаються, то лінією їх перетину є коло (мал. 196).



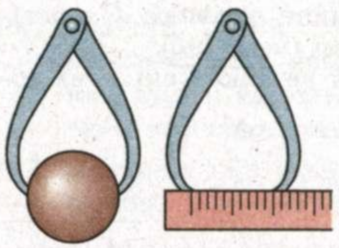
Мал. 194



Мал. 195

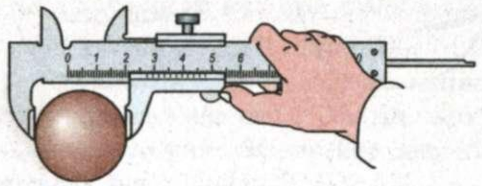


Мал. 196

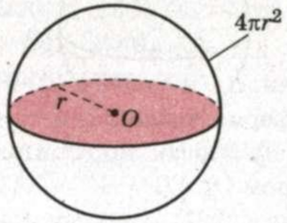


Мал. 197

Приклади матеріальних куль: кульки підшипника, спортивні ядра, цукерки-драже тощо. Форму, наближену до кулі, мають Земля, Місяць, Сонце, інші небесні тіла. Діаметри невеликих матеріальних куль вимірюють *кронциркулем* (мал. 197) або *штангенциркулем* (мал. 198).



Мал. 198



Мал. 199

Можна довести, що площа поверхні кулі в 4 рази більша за площу її великого круга (мал. 199). Оскільки площа круга

радіуса r дорівнює πr^2, то площу сфери радіуса r можна знаходити за формулою $S_{сф} = 4\pi r^2$.

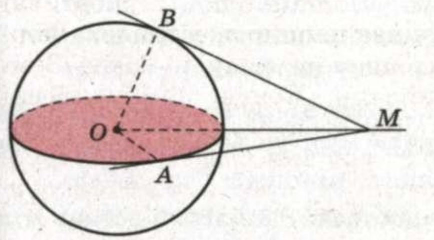
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке куля? Що таке сфера? Назвіть їх елементи.
2. Що таке діаметральна площина кулі? А екватор; полюс?
3. Якою фігурою є переріз кулі площиною?
4. Яку площину називають дотичною до кулі? Які її властивості?
5. Яку пряму називають дотичною до кулі? Які її властивості?
6. За якої умови одна сфера дотикається до другої?
7. Як можна знайти площу поверхні кулі?

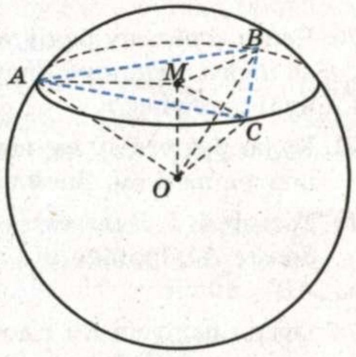
Виконаємо разом

1. З однієї точки до кулі проведено дві дотичні прямі. Доведіть, що відстані від даної точки до точок дотику рівні.

● **Розв'язання.** Нехай MA і MB – відрізки дотичних, проведених до кулі з точки M, а O – центр даної кулі (мал. 200). Трикутники AMO і BMO рівні за спільною гіпотенузою MO і катетами OA і OB. Тому $MA = MB$.



Мал. 200



Мал. 201

2. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 10 см лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

● **Розв'язання.** Нехай точки A, B, C лежать на сфері з центром O; $AB = BC = CA = OA = OB = OC$ і OM – шукана відстань (мал. 201). Тоді трикутники OMA, OMB і OMC рівні за спільним катетом OM і гіпотенузами. Отже,

$$MA = MB = MC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$