Знаменна річ, що наука (теорія ймовірностей), яка почалася з вивчення ігор, піднеслася до найважливіших об'єктів людського пізнання.

П. Лаплас

4 Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Елементи комбінаторики.
- Комбінаторні правила суми та добутку.
- Перестановки, розміщення, комбінації.
- Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення.
- Графічне подання інформації про вибірку.
- Випадкова подія.
- Ймовірність події.
- Відносна частота події та випадкові величини.

§ 17. Множини та підмножини

Ви знаєте, що таке бригада, табун, рій, набір, комплект тощо. У математиці будь-які сукупності називають одним словом: *множина*. Можна говорити, наприклад, про множини планет, держав, пісень, партій, рівнянь, функцій, точок, чисел, фігур тощо. Об'єкти, які входять до множини, називаються її *елементами*. Якщо a – елемент множини M, то пишуть: $a \in M$. Запис $b \notin M$ означає, що b – не є елементом множини M. Множини часто записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад:

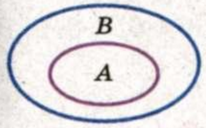
$\{\Delta, \square, \bigcirc\}$ – множина фігур Δ, $\square$, $\bigcirc$;

$\{0, 1, 2, 3\}$ – множина цифр 0, 1, 2, 3.

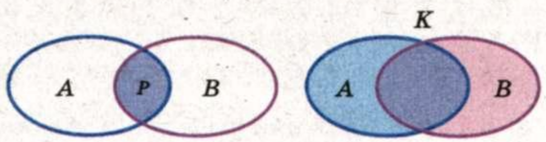
Це – приклади *скінченних множин*. Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають *нескінченною множиною*. Нескінченними є, наприклад, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел. Їх позначають відповідно буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$. Нескінченними є також множини точок на прямій чи відрізку, множини дійсних чисел на проміжках $[2; 3]$, $(-6; \infty)$ та ін.

Вважають, що елементи множини – різні. Дві множини називають *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів. $\{1; 3; 5\}$ і $\{3; 1; 5\}$ – різні записи однієї й тієї самої множини.

У математиці часто розглядаються множини, які мають тільки один елемент або й зовсім не мають елементів. Наприклад, можна говорити про множину коренів рівняння $3x + 5 = 17$ або множину розв'язків нерівності $x^2 + 3 < 0$. Якщо множина не містить жодного елемента, її називають *порожньою множиною* і позначають символом $\varnothing$.



Мал. 83



а) б)

Мал. 84

Якщо A – частина множини B, то її називають *підмножиною* множини B і записують: $A \subset B$. Наочно це зображають за допомогою діаграми Ейлера (мал. 83). Правильними є співвідношення:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}.$$

Трапляється, що множини A і B мають спільні елементи. Якщо множина P містить усі спільні елементи множин A і B і тільки їх, то множину P називають *перерізом множин* A і B. Записують це так: $A \cap B = P$; діаграмою Ейлера зображають, як показано на малюнку 84, *а*. Множина, яка містить кожен елемент кожної з множин A і B і тільки ці елементи, називається *об'єднанням множин* A і B. Якщо K – об'єднання множин A і B, то пишуть: $A \cup B = K$ (мал. 84, *б*).

Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Її позначають: $A \setminus B$. Наприклад, якщо $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 4; 5; 7; 8\}$, то $A \cap B = \{1; 4\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, $A \setminus B = \{2; 3\}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Наведіть приклад множини.
2. Як позначають множини та їх елементи?
3. Які бувають множини?
4. Які множини називають рівними?
5. Що таке підмножина?
6. Що таке об'єднання двох множин?
7. Що таке переріз двох множин?

Виконаємо разом

1. Запишіть усі підмножини множини $M = \{c, d, k\}$.

● **Розв'язання.** Підмножинами цієї множини будуть множини:

$$\{c\}, \{d\}, \{k\}, \{c, d\}, \{c, k\}, \{d, k\}, \{c, d, k\}, \varnothing.$$

2. Знайдіть переріз та об'єднання множин A і B, якщо $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

● **Розв'язання.** Оскільки $A \subset B$, то $A \cap B = A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. $A \cup B = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

3. A і B – множини розв'язків рівнянь $x^3 - x = 0$ та $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Знайдіть: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

● **Розв'язання.** Розв'яжемо кожне рівняння:

$x^3 - x = 0$, $x(x - 1)(x + 1) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$;

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, $x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$, $(x^2 - 1)(x - 3) = 0$, звідки $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Отже, $A = \{0, -1, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$.

Тоді: а) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3\}$; б) $A \cap B = \{-1, 1\}$.

Виконайте усно

561. Скільки елементів має множина:
а) $\{7, 8, 9\}$; б) $\{a, b, c, d\}$?

562. Скільки елементів має множина двоцифрових чисел, кратних 10? Назвіть її елементи.

563. Скільки елементів має множина квадратів? А ромбів з кутами 60°?

564. Скільки елементів має множина коренів рівняння:
а) $x^2 = 2$; б) $x^2 + 27 = 8$; в) $|x| = 0$?

565. Чим є переріз та об'єднання множин: а) натуральних і цілих чисел; б) раціональних та ірраціональних чисел?

566. Як називається: а) множина коренів; б) множина людей, яких обслуговує банк; в) множина квітів у вазі; г) множина музикантів, які виступають разом?

А

567. Випишіть усі елементи кожної множини:
A – множина днів тижня; B – множина кольорів світлофора; C – множина материків; D – множина цифр; E – множина кольорів веселки.

568. Наведіть приклади множини, яка має: а) два елементи; б) п'ять елементів; в) один елемент.

569. Запишіть множину букв, якими записують ваше ім'я та прізвище.

570. Запишіть множину цифр, якими записують дату вашого народження.

571. Задайте переліком елементів множину одноцифрових чисел, які діляться: а) на 3; б) на 5; в) на 15.

572. Випишіть усі підмножини для кожної множини:
а) $\{\bullet, \blacksquare\}$; б) $\{*, \Delta, \#\}$.

573. Запишіть множину голосних звуків українського алфавіту.

574. Напишіть множину цілих чисел, які:
а) більші за 3 та менші за 13;
б) не більші за 12 і не менші за -2.

575. Позначте на координатній прямій множину точок, яким відповідають числа: $-3, -1, 2, 3, 4, 5$.

576. Запишіть множину натуральних дільників числа: а) 60; б) 73.

577. Запишіть множину спільних дільників чисел 120 і 150.

578. Запишіть множину розв'язків рівняння:

а) $x(x^2 - 4) = 0$; б) $x^2 + 6 = 0$; в) $x^2 = \sqrt{x}$.

579. Запишіть множину розв'язків нерівності:

а) $2x - 1 < 7$; б) $x^2 - 2x \leqslant 0$; в) $|x - 3| < 2$.

580. Які висловлення правильні:

а) $7 \in Q$; б) $-5 \in R$; в) $\sqrt{3} \in Q$; г) $2\frac{1}{3} \in Z$?

581. Чи є множина голубів підмножиною множини птахів? Зобразіть це діаграмою Ейлера.

Б

582. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = x^2$, заданої на проміжку $[-2; 7]$;

б) $y = 1^x$, якщо $x \in [1; 8]$.

583. Дано множини: $K = \{a, b, c, 2\}$, $P = \{1, 2, a, c, x\}$. Знайдіть їх переріз, об'єднання та різницю.

Знайдіть $A \cap B$ і $A \cup B$ (584, 585).

584. а) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{5, 7, 3\}$;

б) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, -3\}$;

в) $A = \{\blacklozenge, \blacktriangle, \bullet\}$, $B = \{\blacktriangle, \bigcirc, \blacksquare\}$;

г) $A = \{\square, ☼, \blacktriangle\}$, $B = \{☼, \Delta, \square\}$.

585. а) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$;

б) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{б, в, \beta, \gamma, г\}$;

в) $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 6, 5, 4\}$;

г) $A = \{2, 3\}$, $B = \{22, 33\}$.

586. Серед названих нижче множин укажіть скінченні та нескінченні:

а) множина від'ємних чисел;

б) множина цифр у записі числа π;

в) множина чисел, які належать відрізку $[0; 1]$;

г) множина розв'язків рівняння $2x + 3y = 5$;

ґ) множина розв'язків нерівності $x^2 - 2y + 1 \leqslant 0$.

587. Запишіть переліком множину: а) спільних дільників чисел 60 і 126; б) простих чисел першої сотні; в) розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 0$.

Знайдіть об'єднання та переріз числових проміжків (588, 589).

588. а) $(-\infty; 5)$ і $(1; \infty)$; б) $(1; 3)$ і $[1; \infty)$; в) $[0; 2]$ і $(-\infty; 0)$.

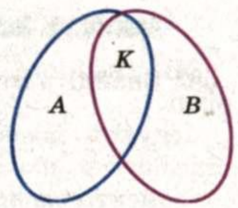
589. а) $(-7; 7)$ і $(-\infty; -1)$; б) $[0; 3)$ і $[-3; 0]$; в) $[4; \infty)$ і $[1; 2)$.

590. A і B – множини розв'язків рівнянь $2x + 3y = 5$ та $x - 5y = 9$. Запишіть множину $A \cap B$. Що є елементом цієї множини?

591. A – множина чисел, кратних 2; B – множина чисел, кратних 3. Якою є множина $A \cap B$? Скільки елементів вона має?

592. A – множина парних натуральних чисел; B – множина непарних натуральних чисел. Якими є множини $A \cap B$, $A \cup B$ та $A \setminus B$?

593. На малюнку 85 зображені: A – множина прямокутників, B – множина ромбів, $K = A \cap B$. Опишіть множину K. Чи правильно, що $K \cap A = K$, $K \cup A = A$? Опишіть множини $A \setminus B$ та $B \setminus A$.



Мал. 85

594. а) Нехай A – множина всіх квадратних рівнянь, а B – множина рівнянь, які мають два корені. Чи рівні ці множини? Зобразіть їх діаграмою Ейлера.

б) Дано множину $\{\Delta, \square, \bigcirc\}$. Складіть усі її двохелементні підмножини. Скільки їх?

595. Дано множину $A = \{a, b, c, d\}$. Складіть усі трьохелементні підмножини множини A. Скільки їх?

596. Скільки підмножин має множина, яка містить: а) один елемент; б) два елементи; в) три елементи; г) чотири елементи? Перевірте твердження: «Множина, що складається з n елементів, містить 2^n підмножин» для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

597*. Покажіть, що кожна п'ятиелементна множина має стільки трьохелементних підмножин, скільки й двохелементних.

Вправи для повторення

598. Порівняйте числа:

а) $\frac{4}{9}$ і $\frac{5}{11}$; б) $\frac{5}{22}$ і $0{,}2(27)$.

599. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = x^2 + 1$.

600. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-1)} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x(x^2-2x+1)}{(4x+4)} < 0$.

§ 18. Комбінаторика та правило добутку

Говорячи «множина», «підмножина», на порядок розміщення їх елементів не зважають. Кажуть, що вони не впорядковані. Крім них, нерідко розглядають і *впорядковані множини*. Так називають множини з фіксованим порядком елементів. Їх позначають не фігурними, а круглими дужками. Наприклад, з елементів множини $\{a, b, c\}$ можна утворити 6 трьохелементних упорядкованих множин:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Як множини, всі вони рівні, як упорядковані множини – різні.

Існують задачі, в яких треба визначити, скільки різних підмножин або впорядкованих підмножин можна утворити з елементів даної множини. Їх називають *комбінаторними задачами*. А розділ математики про розв'язування комбінаторних задач називають *комбінаторикою*.

Розглянемо два основні правила, за допомогою яких розв'язується багато задач з комбінаторики.

Задача 1. У місті N є два університети – політехнічний та економічний. Абітурієнту подобаються три факультети в політехнічному університеті і два – в економічному. Скільки можливостей має студент для вступу до університету?

●**Розв'язання.** Позначимо буквою A множину факультетів, які обрав абітурієнт у політехнічному університеті, а буквою B – в економічному. Тоді $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнт має $3 + 2 = 5$ можливостей вступати до університету. Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називається *правилом суми*.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B – n способами, то елемент з множини A або з множини B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило суми поширюється й на більшу кількість множин.

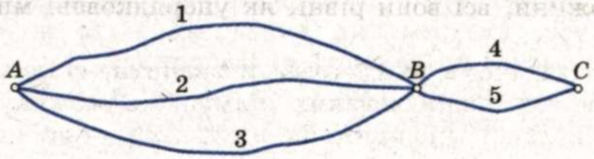
Задача 2. Родина з чотирьох осіб планує літній відпочинок. Діти обрали 4 міста – Одесу, Євпаторію, Ялту, Феодосію. Батьки визначилися з базами відпочинку так: в Одесі – 1, у Євпаторії – 3, в Ялті – 2, у Феодосії – 2. Скільки можливостей вибору літнього відпочинку має родина?

●**Розв'язання.** Оскільки всі бази відпочинку різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$. Отже, родина може обирати варіант відпочинку з 8 можливих.

Задача 3. Від пункту A до пункту B ведуть три стежки, а від B до C – дві. Скількома маршрутами можна пройти від A до C?

●**Розв'язання.** Щоб пройти від A до B, треба вибрати одну з трьох стежок: 1, 2 або 3 (мал. 86). Після цього треба вибрати одну з двох інших стежок: 4 чи 5. Усього від A до C ведуть 6 маршрутів, бо $3 \cdot 2 = 6$. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар:

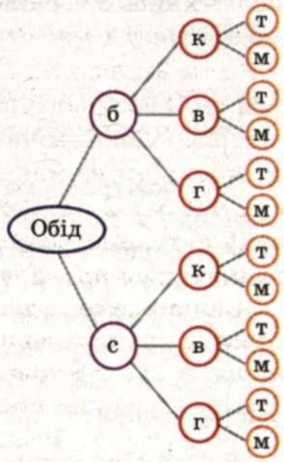
$$(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).$$



Мал. 86

Узагальнимо описану ситуацію. **Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий – n способами, то таку пару можна вибрати mn способами.** Це – *правило добутку*, яке часто називають основним правилом *комбінаторики*. Зверніть увагу: йдеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів.

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, ***якщо перший компонент упорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий – n способами, а третій – k способами, то таку впорядковану трійку можна вибрати mnk способами.*** Наприклад, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви – борщ (б) і суп (с), 3 другі – котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні – тістечка (т) і морозиво (м), то всього з трьох страв



Мал. 87

їдальня може запропонувати 12 різних наборів, бо $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Описаній ситуації відповідає діаграма, зображена на малюнку 87. Такі діаграми називають *деревами*.

Задача 4. Скільки різних поїздів можна скласти з 6 вагонів, якщо кожен вагон можна поставити на будь-якому місці?

● Розв'язання. Першим можна поставити будь-який із 6 вагонів. Маємо 6 виборів. Другий вагон можна вибрати з решти 5 вагонів. Тому, згідно з правилом множення, два перші вагони можна вибрати $6 \cdot 5$ способами. Третій вагон можна вибрати з 4 вагонів, що залишилися. Тому три перші вагони можна вибрати $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Продовжуючи подібні міркування, приходимо до відповіді: всього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ різних поїздів.

Зверніть увагу на розв'язання останньої задачі. Воно звелося до обчислення добутку всіх натуральних чисел від 1 до 6. У комбінаториці подібні добутки обчислюють часто. **Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають *n-факторіалом* і позначають $n!$** Наприклад,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120; \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Домовилися вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які задачі називають комбінаторними?
2. Що таке комбінаторика?
3. Сформулюйте правило суми.
4. Сформулюйте основне правило комбінаторики.
5. Наведіть приклад діаграми-дерева.
6. Що таке факторіал? Як його позначають?

Виконаємо разом

1. У розіграші на першість міста з баскетболу беруть участь команди з 12 шкіл. Скількома способами можуть бути розподілені перше та друге місця?

● Розв'язання. Перше місце може одержати одна з 12 команд. Після того як визначено володаря першого місця, друге місце може отримати одна з 11 команд. Отже, загальна кількість способів, якими можна розподілити перше та друге місця, дорівнює $12 \cdot 11 = 132$.

2. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

● Розв'язання. Першою цифрою числа може бути одна з п'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Якщо першу цифру обрано, то другу можна обрати 5 способами, третю – 4, четверту – 3. Згідно з правилом множення, загальна кількість способів дорівнює

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300.$$

3. Скільки можна скласти парних чотирицифрових чисел із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо жодна цифра не повторюється?

● Розв'язання. Парні числа можуть закінчуватися цифрами 0, 2 або 4. Розділимо множину всіх парних чотирицифрових чисел, які можна скласти за умовою задачі, на дві групи: 1) числа, які закінчуються нулем, і 2) числа, які не закінчуються нулем.

У першій множині міститься $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел (усі цифри, крім останньої, вибираються з 5 можливих).

У другій множині міститься $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ чисел. Останньою цифрою числа може бути одна з двох цифр: 2 або 4. Якщо останню цифру обрано, то першу можна обрати 4 способами (не нуль), другу – також 4 способами, а третю – 3. Згідно з правилом додавання, загальна кількість способів дорівнює $60 + 96 = 156$.

Виконайте усно

601. Обчисліть:

а) $2!$; б) $3!$; в) $4!$; г) $5!$.

602. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одного учня в шкільний комітет самоврядування?

603. У класі 11 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати двох учнів у шкільний комітет самоврядування?

604. У класі 12 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна делегувати одну дівчину та одного хлопця в шкільний комітет самоврядування?

А

605. Обчисліть:

а) $5!$; б) $8!$; в) $10!$; г) $13!$.

606. Спростіть вираз:

а) $n! \cdot (n + 1)$; б) $n \cdot (n - 1)!$; в) $(n + 1)! : n!$; г) $n! : n$.

607. У магазині є три види печива і десять видів цукерок. Сергій хоче купити сестрі або печиво, або цукерки. Скількома способами він може це зробити?

608. Скількома способами можна посадити чотирьох дітей на лавці?

609. На вершину гори ведуть 4 стежки. Скількома маршрутами турист може піднятися на гору та спуститися з неї, обираючи для спуску й підйому різні стежки?

610. Їдальня приготувала на сніданок 3 другі страви (A, B, C) і два напої (M, K). Скільки різних наборів із двох страв можна вибрати на сніданок? Складіть відповідну діаграму-дерево.

611. Скількома способами 5 осіб можуть утворити чергу до каси?

612. Скільки різних речень можна написати словами «ми», «любимо», «грати»? А словами «ми», «дуже», «любимо», «грати»?

613. Скількома способами дівчинка може нанизати на нитку 8 різних намистин?

614. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Б

615. Обчисліть:
а) $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; в) $20! : 25!$; г) $100! : 97!$.

616. Спростіть вираз:
а) $n! : (n - 1)$; б) $(n - 1)! : n!$; в) $(n + 1)! : (n - 1)!$.

617. Обчисліть $(2n)! : n!$, якщо: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 10$.

618. Знайдіть значення n, якщо:
а) $n! = (n - 1)! \cdot 8$; б) $(n + 2)! = 132 \cdot n!$.

619. Вісім друзів вирішили провести шашковий турнір так, щоб кожен зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?

620. Їдальня приготувала на обід 3 перші страви (A, B, C), 3 другі (a, b, c) і 3 треті (x, p, y). Скільки різних наборів із трьох страв можна вибрати на обід? Складіть відповідну діаграму-дерево.

621. До моря ведуть 7 доріг. Скількома способами відпочивальник може дістатися моря і повернутися назад? Розгляньте випадки, коли рух до моря та від моря відбувається: а) однією дорогою; б) різними шляхами; в) одним із двох попередніх способів.

622. Скільки різних «кортежів» може створити хлопчик із чотирьох іграшкових автомобілів – білого, жовтого, синього та червоного? Складіть відповідну діаграму-дерево.

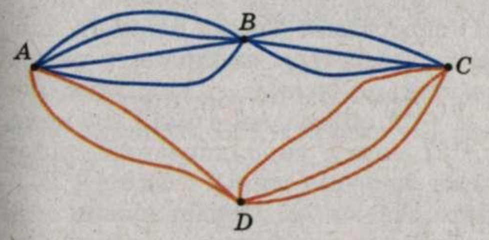
623. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри не можуть повторюватись?

624. У середу за розкладом в 11-А класі 6 різних уроків, серед яких алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб алгебра й геометрія стояли поруч?

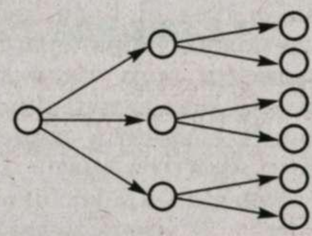
625. У вівторок за розкладом в 11-Б класі 7 різних уроків, серед яких фізика та астрономія. Скількома способами можна скласти розклад так, щоб фізика й астрономія не стояли поруч?

626. Скільки різних упорядкованих трійок можна утворити з чотирьох елементів – a, b, c, d?

627. Складіть дві комбінаторні задачі, що відповідають малюнкам 88 і 89, та розв'яжіть їх.



Мал. 88



Мал. 89

Вправи для повторення

628. Знайдіть похідну функції:
а) $y = 2x^3 - 3$; б) $y = 2x(x - 3)$;
в) $y = 2\sin x - 3$; г) $y = 2 - 3e^x$.

629. Розв'яжіть рівняння:
а) $\sqrt{2x - 3} = 5$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

630. Спростіть вираз:
а) $1 - \sin^2 x$; б) $1 + \mathrm{tg}^2 x$; в) $1 + \cos 2x$.

§ 19. Розміщення, перестановки та комбінації

Щоб розв'язувати складніші задачі на визначення ймовірностей подій, корисно навчитись обчислювати раціональним способом кількість різних вибірок з даної множини елементів. Нехай дано множину з m елементів – a, b, c, ..., k. Вибираючи тим чи іншим способом елементи з цієї множини, можна утворити різні вибірки, тобто підмножини даної множини або впорядковані підмножини. Залежно від того, чим відрізняється одна вибірка від інших, їх називають по-різному.

Вибірки, які відрізняються одна від одної або елементами, або порядком їх розміщення, називають *розміщеннями*. Наприклад, з 3 елементів a, b, c можна утворити такі розміщення по 2 елементи:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Вважають, що існує 6 різних розміщень з 3 елементів по 2. Число розміщень з m елементів по n позначають A_m^n. Тому можна записати: $A_3^2 = 6$. У виразі A_m^n завжди $n \leqslant m$.

Як обчислити A_m^n при різних натуральних значеннях m і n? Нехай маємо множину з m елементів. Перший елемент можна вибрати m способами: взяти будь-який з m елементів. Другий елемент, щоб записати за першим, доведеться вибирати з решти $m - 1$ елементів, тобто $m - 1$ способами. Тому впорядковані пари двох перших елементів потрібної вибірки можна вибрати $m(m - 1)$ способами. Третій елемент, щоб записати його після другого, доведеться вибирати з решти $m - 2$ елементів. Якщо за кожною з $m(m - 1)$ різних пар даних елементів записати $m - 2$ способами третій елемент, то утвориться $m(m - 1)(m - 2)$ різних упорядкованих трійок елементів. Аналогічно можна вибрати $m(m - 1)(m - 2) \times \times (m - 3)$ упорядкованих четвірок і т. д. Продовжуючи такі міркування, доходимо висновку, що для будь-яких натуральних чисел m і n $A_m^n = m(m - 1)(m - 2)(m - 3)...(m - (n - 1))$.

У правій частині рівності – n множників, тому результат можна сформулювати у вигляді такого правила.

Кількість розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше з яких m. Наприклад, $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Задача 1. Скількома способами збори з 20 осіб можуть обрати голову та секретаря?

● Розв'язання. Йдеться про впорядковані 2-елементні підмножини множини, що складається з 20 елементів. Таким розміщенням буде $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$.

Відповідь. 380 способами.

Якщо розглянути розміщення за умови, що $n = m$, то отримаємо множини, які відрізняються лише порядком.

Розміщення з m елементів по m називаються перестановками. Кількість перестановок з n елементів позначають символом P_n. Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна утворити 6 різних перестановок:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Отже, $P_3 = 6$. А взагалі кількість перестановок з m елементів дорівнює кількості розміщень з m елементів по m, тобто завжди

$$P_m = m(m-1)(m-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Завжди $P_m = m!$. Наприклад,

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Задача 2. Скількома способами можна скласти список із 10 прізвищ?

● Розв'язання. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Відповідь. 3 628 800 способами.

Вибірки, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом, а не порядком їх розміщення, називають *комбінаціями*. Кількість комбінацій з m елементів по n позначають C_m^n. Тут також $n \leqslant m$. Наприклад, із чотирьох елементів a, b, c, d по три можна скласти 4 комбінації:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Якщо з кожної комбінації з m елементів по n зробити P_n перестановок, то дістанемо A_m^n розміщень. Тому $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, звідки

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}.$$

Якщо помножимо чисельник і знаменник здобутого дробу на $(m - n)!$, то дістанемо формулу для обчислення кількості комбінацій з m елементів по n:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Наприклад, $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15.$

Зверніть увагу: $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$. Вважають також, що $C_m^0 = 1$ для будь-якого $m \in N$.

Задача 3. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на збори 2 делегати?

Розв'язання. Тут $m = 25$, $n = 2$ і порядок не має значення. Тому

$$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Відповідь. 300 способами.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке комбінаторика?
2. Що таке перестановки? Як обчислюють P_n?
3. Сформулюйте означення факторіала.
4. Що таке розміщення? За якою формулою обчислюють кількість розміщень з m елементів по n?
5. Що таке комбінації? За якою формулою обчислюють кількість комбінацій з m елементів по n?

Виконаємо разом

1. Скількома способами можна скласти денний розклад із 5 різних уроків, якщо клас вивчає 10 різних предметів?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні підмножини множини, що складається з 10 елементів. Це розміщення $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.

Відповідь. 30 240 способами.

2. Скількома способами можна розмістити на полиці 5 дисків?

Розв'язання. Йдеться про впорядковані 5-елементні множини. Шукана кількість способів дорівнює

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Відповідь. 120 способами.

3. Обчисліть: а) C_7^3; б) C_{20}^{18}.

Розв'язання.

а) $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$; б) $C_{20}^{18} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{2! \cdot 18!} = 190$.

4. На колі розміщено 9 точок. Скільки існує відрізків, які з'єднують кожну точку з іншою?

Розв'язання. Таких відрізків існує стільки, скільки різних комбінацій з 9 точок можна утворити по 2, бо відрізок з'єднує дві точки, а саме: $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

Виконайте усно

631. Складіть усі можливі перестановки з букв α, β, γ.

632. Обчисліть P_2, P_3, P_4.

633. Обчисліть C_5^1, C_5^5, C_5^0.

634. Скількома способами 4 учні можуть розміститися за двома двомісними партами?

635. Скількома способами з трьох різних цукерок можна вибрати дві?

А

636. Запишіть усі комбінації з елементів x, y, z, t по 2.

637. Запишіть усі розміщення з елементів x, y, z, t по 2.

638. Складіть усі можливі перестановки з елементів A, B, C.

639. Обчисліть: а) 5!; б) 6!; в) P_4; г) P_7.

640. Обчисліть P_n, якщо n дорівнює 6, 7, 8, 9.

641. Скількома способами 6 учнів можуть розміститися за трьома двомісними партами?

642. На тарілці є 7 груш. 5 дітей мають взяти з тарілки по одній груші. Скількома способами це можна зробити?

643. Скільки різних трицифрових чисел можна написати цифрами 6, 7 і 8 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

644. Скільки різних чотирицифрових чисел можна написати цифрами 0, 1, 2, 3 так, щоб усі цифри кожного числа були різні?

645. Випишіть усі розміщення з букв A, B, C, D по 2.

646. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 10 місцях?

647. Обчисліть: а) A_5^3; б) A_8^4; в) A_9^8; г) A_{50}^2.

648. Обчисліть: а) A_6^3; б) A_{10}^4; в) C_5^3; г) C_{10}^8.

649. Що більше: C_7^4 чи C_7^3?

650. Обчисліть: а) C_9^3; б) C_{10}^7; в) $C_{12}^{10} : P_3$; г) $A_{10}^2 - C_{10}^2$.

651. На полиці є 20 книжок. Скількома способами можна вибрати дві з них?

652. У класі 32 учні. Скількома способами можна вибрати з них двох чергових?

653. Скільки різних правильних дробів можна написати так, щоб одне з чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 було чисельником, а друге – знаменником?

654. Скільки існує відрізків, кінцями яких є n даних точок?

655. Скільки діагоналей має опуклий 10-кутник; n-кутник?

Б

656. На кожній із п'яти карток написано одну з цифр 1, 2, 3, 4, 5. Скільки з цих карток можна скласти різних чисел: а) двоцифрових; б) трицифрових; в) чотирицифрових?

657. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні? А чотирицифрових?

658. Скільки існує таких трицифрових чисел, у яких кожна цифра не менша за 5 і цифри в кожному числі не повторюються?

659. Скільки словників треба мати, щоб безпосередньо перекладати з п'яти різних мов на кожну з них?

660. Скількома способами можна пошити трикольоровий прапор з трьох горизонтальних смуг однакової ширини, якщо є тканини 5 різних кольорів?

661. Доведіть, що для кожного натурального n:

а) $P_{n+1} = nP_n$; б) $A_m^{m-1} = P_m$; в) $A_n^k = nA_{n-1}^{k-1}$.

662. Знайдіть n, якщо: а) $P_n = 42 \cdot P_{n-2}$; б) $P_n = 720 \cdot P_{n-3}$.

663. Яке число менше і в скільки разів:

а) A_8^5 чи P_8; б) A_9^8 чи P_9; в) C_{20}^2 чи C_{20}^3; г) C_{30}^2 чи C_{30}^{28}?

664. Розв'яжіть рівняння:

а) $A_x^4 = 56 \cdot A_x^2$; б) $A_x^5 = 72 \cdot A_{x-2}^3$; в) $C_x^2 = 21$; г) $C_x^2 = 20 + x$.

665. Доведіть, що коли числа m, n натуральні та $m > n$, то:

а) $C_m^n = C_m^{m-n}$; б) $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$.

666*. Скількома способами можна роздати 28 пластинок доміно чотирьом гравцям, щоб кожному дісталося 7 пластинок?

667. Скількома способами можна заповнити картку «Спортлото» – закреслити 6 номерів із 49?

Вправи для повторення

668. Знайдіть первісну функції:

а) $y = 2x^2 - 5$; б) $y = 2^x$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \cos 3x$.

669. Розв'яжіть рівняння:

а) $5^{2x+3} = 5$; б) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

670. Запишіть у вигляді логарифма вираз:

а) $1 + 2\ln x$; б) $3\lg x - \lg 2x$; в) $2 + \log_2 2x$.

§ 20. Елементи статистики

Статистика – це наука про збирання, обробку та вивчення різноманітних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами й подіями. Найчастіше вона використовується в економіці, політиці та експериментальних дослідженнях. Статистичну інформацію збирають за допомогою спостережень, зокрема перепису, опитувань, обліків тощо.

Статистичні відомості про велику сукупність об'єктів (генеральну сукупність) отримують внаслідок аналізу її незначної частини – *вибірки*. Щоб дізнатися, наприклад, про найпоширеніші розміри чоловічого взуття, досить опитати кілька десятків чоловіків. Припустимо, що, опитавши 60 чоловіків, здобули результати, подані в таблиці.

Розмір взуття	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Кількість чоловіків	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Це – *частотна таблиця*, в якій числа другого рядка – *частоти*. Наприклад, частота взуття розміру 32 дорівнює 6. Відносна частота цього розміру – 6 : 60 = 0,1 = 10 %.

Проаналізувавши таку вибірку, роблять загальний висновок: приблизно 10 % чоловічого взуття треба виготовляти 32-го розміру і вдвічі менше – 26-го розміру. Це – наближені відношення, але на практиці таких наближень достатньо.

Математичний аналіз різних вибірок – сфера *математичної статистики*. Її основне завдання – розробляти ефективні методи вивчення великих сукупностей об'єктів на основі порівняно невеликих вибірок. Кожен елемент вибірки називають її *варіантою*. Вибірка, отримана внаслідок спостережень, буває невпорядкованою. Упорядкувавши її, дістають *варіаційний ряд*. Різниця між крайніми членами варіаційного ряду – *розмах вибірки*. Нехай дано вибірку

4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.

Упорядкувавши її за зростанням варіант, маємо варіаційний ряд:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.

Розмах даної вибірки $r = 9 - 1 = 8$.

Мода вибірки – її варіанта з найбільшою частотою. *Медіана вибірки* – число, яке поділяє відповідний варіаційний ряд навпіл. Розглядувана вибірка має моду 7, а медіану 5,5, бо $\frac{1}{2}(5 + 6) = 5{,}5$.

Середнім арифметичним n чисел називають n-ну частину їх суми. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її варіант. Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8 середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 8) = 4.$$

Якщо варіанти вибірки повторюються, то суми рівних доданків можна замінити добутками.

Задача. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 2300 грн., 8 – по 2450 грн., а 5 – по 2500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

• **Розв'язання.** Всього робітників у бригаді 7 + 8 + 5 = 20. Тому шукана середня зарплата

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(2300 \cdot 7 + 2450 \cdot 8 + 2500 \cdot 5) = 2410.$$

Відповідь. 2410 грн.

У статистиці часто використовують також *середнє квадратичне.* Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє квадратичне σ_1 визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

За допомогою середнього квадратичного найчастіше оцінюють сукупності похибок або відхилень від норми.

Приклад. Виточуючи циліндричну деталь радіуса R, токар практично виточує деталь радіуса $R + \alpha$, де α – деяке відхилення (додатне або від'ємне). Нехай два токарі, виточивши по 6 деталей, допустили такі похибки (у десятих частках міліметра):

перший: 2, –5, 4, –3, –3, 5;
другий: 3, –1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них виконав завдання якісніше?

Щоб відповісти на це запитання, обчислюють середні квадратичні допущених відхилень:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4 + 25 + 16 + 9 + 9 + 25)} \approx 14{,}7;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9 + 1 + 16 + 1 + 1 + 4)} \approx 5{,}3.$$

Отже, якісніше роботу виконав другий токар.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке статистика? А математична статистика?
2. Поясніть, що таке вибірка. Наведіть приклад.
3. Що таке варіанта вибірки? А варіаційний ряд?
4. Що таке розмах; мода; медіана; середнє значення вибірки?
5. Що таке середнє арифметичне; середнє геометричне; середнє квадратичне кількох чисел?

Виконаємо разом

1. Внаслідок вибіркового аналізу виручки (у тис. грн.) туристичної фірми за тиждень дістали вибірку обсягом $n = 40$:

87	94	99	90	90	87	85	87
90	94	87	87	82	90	94	90
85	85	87	94	81	82	87	97
90	94	85	91	87	85	90	82
94	90	94	82	97	81	85	87

За цими даними: а) знайдіть розмах вибірки; б) складіть частотну таблицю.

• **Розв'язання.** а) Випишемо різні значення варіант, які потрапили у вибірку: 87; 94; 99; 90; 85; 82; 81; 97.

Щоб знайти розмах вибірки, розмістимо варіанти в порядку зростання: 81; 82; 85; 87; 90; 94; 97; 99.

Тоді $r = 99 - 81 = 18$.

б) Обчислимо частоту кожної варіанти і складемо частотну таблицю:

x_i	81	82	85	87	90	94	97	99
n_i	3	4	6	9	8	7	2	1

2. За результатами аналізу виробництва м'яса (у тис. т) у січні–жовтні 2010 року в усіх областях України отримали таку сукупність даних:

166; 73; 90; 206; 115; 52; 50; 63; 73; 211; 47; 47; 129; 34; 50; 52; 55; 44; 41; 90; 55; 50; 363; 47; 47.

Знайдіть: моду, медіану та розмах вибірки.

• **Розв'язання.** Розмістимо варіанти вибірки в порядку зростання:

34; 41; 44; 47; 47; 47; 47; 50; 50; 50; 52; 52; 55; 55; 63; 73; 73; 90; 90; 115; 129; 166; 206; 211; 363.

Тоді мода вибірки дорівнює 47 (трапляється 4 рази), медіана – 55 (має 13-й порядковий номер з 25), а розмах – 329 (363–34).

Виконайте усно

671. Знайдіть моду та медіану вибірки з 20 варіант:

а) –1; –1; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8;

б) 3; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 11.

672. Знайдіть середнє значення вибірки:

а) –10; –9; –8; –7; 0; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

б) 0; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 0; 1; 1; 1; 1; 0.

673. У таблиці подано середні значення вологості (в %) у місті Києві. Знайдіть розмах даної вибірки.

Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень
82	80	76	67	63	69
Липень	**Серпень**	**Вересень**	**Жовтень**	**Листопад**	**Грудень**
72	70	75	78	84	86

А

674. Знайдіть моду та медіану вибірки: 28, 29, 29, 30, 31, 32, 32, 32, 32, 33.

675. Дано вибірку 3, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 1. Побудуйте відповідний їй варіаційний ряд, знайдіть розмах, моду та медіану вибірки.

676. Користуючись наведеною на с. 149 частотною таблицею, визначте:

а) частоту й відносну частоту варіанти, яка відповідає розміру 26;

б) у скільки разів взуття розміру 26 слід виробляти менше, ніж розміру 29.

677. Вибірка містить усі натуральні числа, менші за 10, а крім того, числа 6, 8, 8 і 13. Побудуйте її варіаційний ряд. Знайдіть розмах вибірки, її моду та медіану.

678. Варіанти 1, 2, 3, 4, 5 вибірки мають частоти 3, 4, 6, 2 і 3 відповідно, а всього вибірка має 18 варіант. Знайдіть її розмах, моду та медіану.

679. За екзаменаційну роботу з математики отримали 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12 балів відповідно 2, 9, 8, 10, 20, 17, 4, 6 і 4 абітурієнти. Складіть частотну таблицю й обчисліть відносні частоти балів, які траплялися найрідше і найчастіше.

680. Під час медичного обстеження кров'яного тиску в курсантів (в умовах навчального навантаження) одержано такі результати:

x_i	112	114	116	118	120	122	124	126	128	130
n_i	5	20	30	40	40	30	20	10	3	2

Знайдіть центральні тенденції вибірки.

Б

681. Знайдіть середнє арифметичне: а) усіх натуральних чисел, не більших за 100; б) усіх цілих чисел x таких, що $-110 \leqslant x \leqslant 110$.

682. Вибірка містить 60 чисел; з них число 3 трапляється 10 разів, 4 – 20 разів і 5 – 30 разів. Знайдіть її середнє значення, моду та медіану.

683. Вибірка містить усі натуральні числа, більші за 20, але менші за 50, а крім того, числа 13, 31, 31 і 32. Знайдіть її моду, медіану й середнє значення.

684. Протягом 5 днів маси десяти бичків збільшилися відповідно на 2,5; 3,0; 2,8; 2,7; 2,7; 2,8; 2,0; 2,4; 2,6 і 2,9 кілограма. Знайдіть середній денний приріст маси одного бичка.

685. Під час випробувань літака «Антей» були зафіксовані, залежно від напряму та швидкості вітру, такі результати швидкості (км/год) відриву літака:

235	231	234	239	238	232	237	239	230	240
231	238	239	235	233	233	240	234	239	240
230	230	232	240	230	234	240	235	239	236

Побудуйте варіаційний ряд і частотну таблицю цієї вибірки.

686. Виберіть по уривку (1 сторінка) художнього твору двох різних авторів, прочитайте їх. Для букв «а», «б», «н», «о», «ч», «я» складіть частотні таблиці їх наявності в обраних уривках. Порівняйте їх.

687. Чи правильно, що сума різниць між усіма варіантами вибірки та її середнім значенням дорівнює нулю? Наведіть приклади. Обґрунтуйте.

688. Знайдіть середній відсоток бракованих виробів, користуючись такою таблицею.

Партія товару	Кількість виробів, шт.	Відсоток бракованих виробів	Кількість бракованих виробів, шт.
I	2000	3,4	68
II	1420	2,46	35
III	408	0,49	2
Разом	3828		105

689. Суму n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ позначають символом $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (знак суми Σ – сигма велика). Запишіть за допомогою цього знака середнє арифметичне та середнє квадратичне даних n чисел.

690. Три фрезерувальники виготовили по 5 однакових деталей завдовжки 235 мм, допустивши відповідно такі похибки (у мм):
перший: 0,2, −0,2, −0,5, 0,3, 0,4;
другий: 0,1, 0,5, −0,2, −0,4, 0,5;
третій: 0,5, −0,1, −0,4, 0,3, 0,4.
Знайдіть середні квадратичні допущених ними похибок. Який фрезерувальник виконав завдання найкраще?

Вправи для повторення

691. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^3 + 1$ у точці $x_0 = 1$.

692. Ціна на автомобіль спочатку підвищилася на 10 %, а потім знизилася на 10 %. Як змінилася ціна після двох переоцінок?

693. Побудуйте графік функції:
а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -x + 2$; г) $y = -x^2 + 2$.

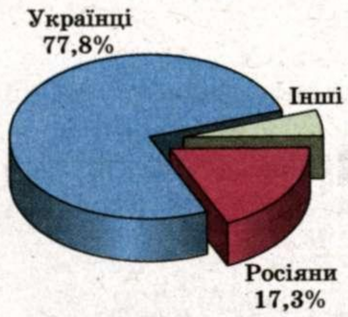
§ 21. Графічні подання інформації про вибірки

Статистичні дані зводять у таблиці. Статистична таблиця – це особлива форма раціонального й систематизованого викладу узагальнених характеристик статистичної сукупності. Як і граматичне речення, статистична таблиця має *підмет* і *присудок*. У підметі наводиться перелік елементів, явищ, ознак, про які йдеться в таблиці. У присудку подаються кількісні характеристики. Наприклад, у наведеній нижче таблиці збору зерна в деяких країнах у 1995 р. підметом є лівий стовпчик, а присудком – числові дані інших стовпчиків.

Країна	Пшениця	Жито	Ячмінь	Усього
Китай	101	0,6	–	400
США	67	0,3	9,9	353
Росія	46	13,9	25,5	103
Франція	33	–	10,5	60
Німеччина	16	2,4	12,2	35
Україна	19	1,2	10,1	34

Інформацію про ту чи іншу вибірку часто подають графічно, найчастіше – у формі діаграм. Слово «діаграма» з грецької мови означає малюнок, креслення. Щоправда, тепер цим словом називають не будь-який малюнок, а схематичне зображення відношень між множинами, різні структури, алгоритми дій тощо. Відношення (співвідношення) між множинами та обсягами понять найчастіше зображають у вигляді діаграм-дерев або діаграм Ейлера (див. мал. 83–85, 87).

Структури моделей, різні діаграми класів і станів зручно подавати у вигляді кругових (секторних) діаграм. На малюнках 90 та 91 на секторній і стовпчастій діаграмах зображено співвідношення між кількостями громадян України різних національностей (згідно з переписом 2001 р.).

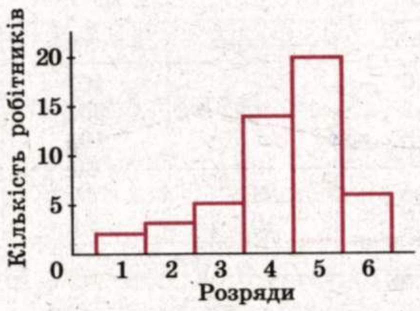


Мал. 90

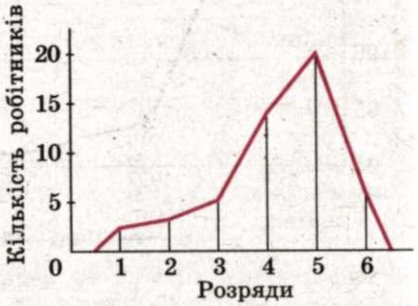
Мал. 91

Стовпчасту діаграму зі з'єднаних прямокутників називають *гістограмою*. На малюнку 92 зображено гістограму, яка відповідає наведеній нижче таблиці розподілу робітників цеху за тарифними розрядами. Іноді замість гістограми будують *полігон розподілу*, з'єднуючи відрізками середини верхніх основ послідовних прямокутників гістограми (мал. 93). Бувають також інші діаграми.

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	2	3	5	14	20	6	50

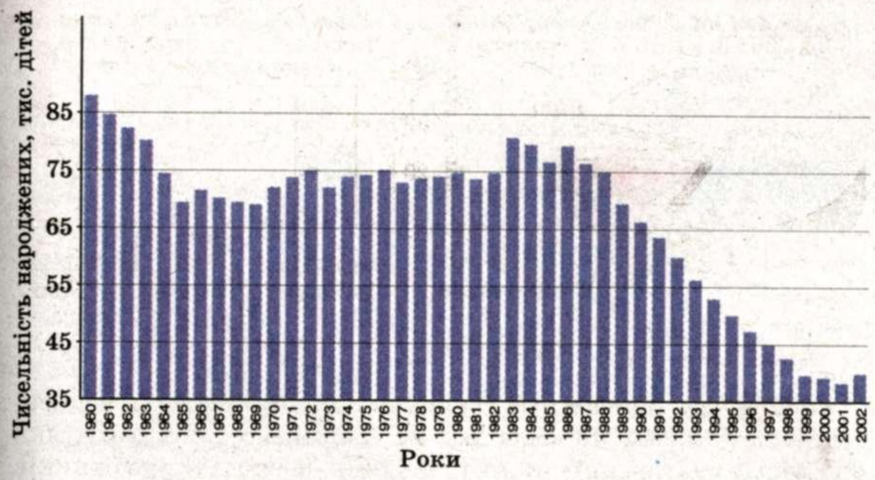


Мал. 92

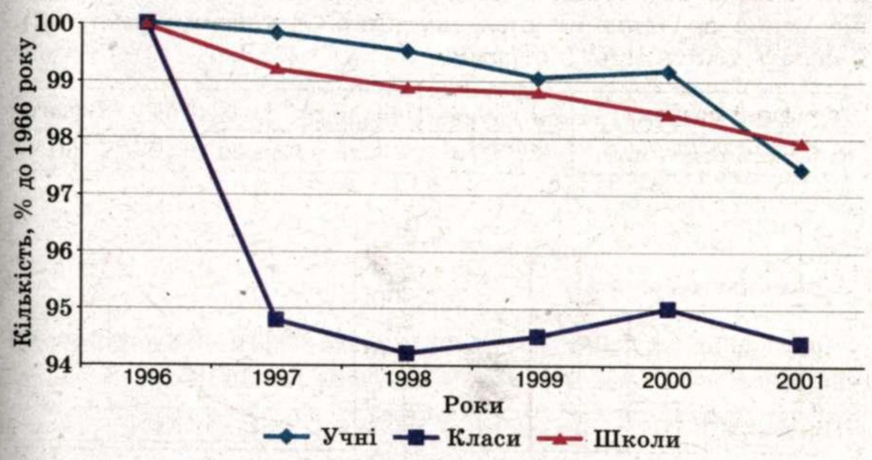


Мал. 93

Інформацію про динаміку того чи іншого явища зручно зображати за допомогою стовпчастих діаграм або графіків. Наприклад, на малюнку 94 наведено діаграму динаміки народжуваності дітей в Україні від 1960 до 2002 року, а на малюнку 95 – графік динаміки кількості учнів, класів і шкіл у селах України.



Мал. 94



Мал. 95

У соціології діаграми часто будують на основі полярної системи координат.

Накресліть на площині промінь OX. Положення довільної точки M цієї площини можна однозначно визначити, задавши два числа: відстань $r = OM$ і кут $\varphi = \angle XOM$. Таку систему координат називають *полярною*, а точку O – її *полюсом*.

На двох наведених нижче діаграмах (мал. 96 і 97) більшим відстаням від полюса 0 відповідають більші значення величин. Проаналізуйте ці діаграми.

Середня заробітна плата, грн., за 2006 р. в адміністративних одиницях України

Мал. 96

Рівні безробіття населення віком від 15 років за 2006 р. у деяких країнах світу

Мал. 97

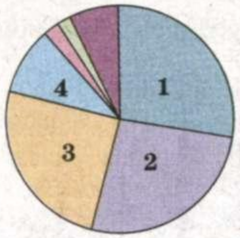
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які способи подання інформації ви знаєте?
2. Опишіть структуру статистичної таблиці.
3. Які види діаграм ви знаєте?
4. Що таке гістограма?
5. Що таке полігон?

Виконаємо разом

1. За даними таблиці «Структура валового збору зернових культур у світі (%)» побудуйте секторну діаграму.

Пшениця	Рис	Кукурудза	Ячмінь	Овес	Жито	Інші
28	26	25	10	2	2	7



Мал. 98

● **Розв'язання.** 100 % відповідає 360°, а 1 % – 3,6°. Множачи 3,6 на дані таблиці, отримаємо відповідно:

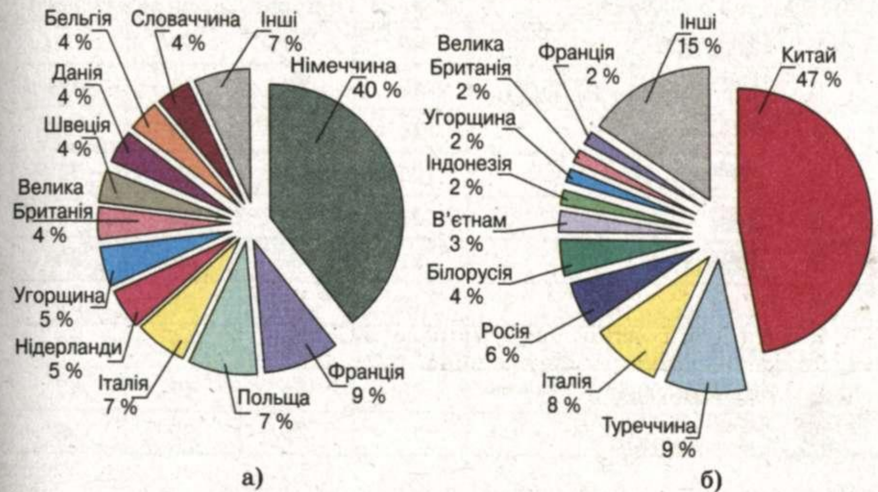
100,8°; 93,6°; 90°; 36°; 7,2°; 7,2°; 25,2°.

Відклавши від центра круга відповідні центральні кути, дістанемо потрібну діаграму (мал. 98).

Досить просто стовпчасту та інші діаграми побудувати за допомогою програми Microsoft Graf (через команди Вставка/Об'єкт/Діаграма Microsoft Graf) або Excel.

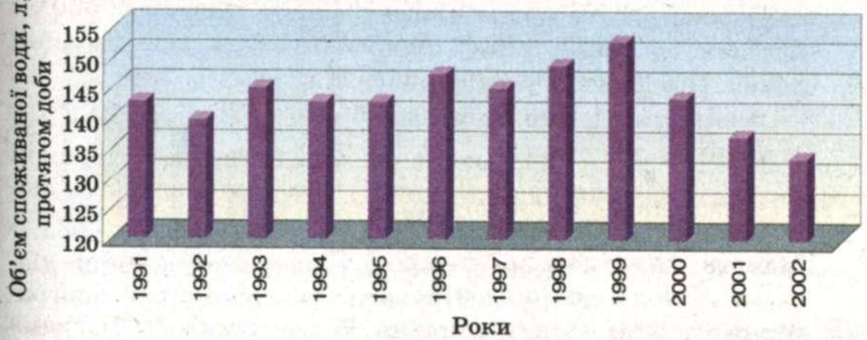
Виконайте усно

694. Як називається вид діаграм, зображених на малюнку 99? Проаналізуйте подані на цих діаграмах дані, які відображають експорт та імпорт швейної продукції в Україні (у грошовому вираженні) за 2007 р. Який висновок можна зробити?



Мал. 99

695. Як називається вид діаграми, зображеної на малюнку 100, де показано динаміку споживання води на душу населення в Чернігівській області? Чому, на вашу думку, зменшується споживання питної води?



Мал. 100