Відкриття аналізу нескінченно малих, тобто рахунку диференціального та інтегрального, — справді один з найбільших винаходів, на які коли-небудь спромігся геній людського духу.

В. Левицький

Інтеграл та його застосування

3

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Первісна та її властивості.
- Таблиця первісних. Знаходження первісних.
- Первісна та площа підграфіка.
- Визначений інтеграл, його геометричний зміст.
- Формула Ньютона–Лейбніца.
- Обчислення площ плоских фігур.
- Застосування інтегралів до розв'язування прикладних задач.

§ 13. Первісна

Досі ми розглядали диференціювання функцій. Не менш важливою є й обернена операція.

Нехай дано функцію $F(x)$ таку, що в кожній точці x деякого проміжку $F'(x) = f(x)$. У цьому разі функцію $f(x)$ називають *похідною функції* $F(x)$, а функцію $F(x)$ – *первісною* для функції $f(x)$.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Досі за даною функцією $F(x)$ ми знаходили її похідну $f(x)$. Таку операцію, як ви вже знаєте, називають *диференціюванням*. Знаходження за даною функцією $f(x)$ її первісної $F(x)$ – операція, обернена до диференціювання; її називають *інтегруванням*.

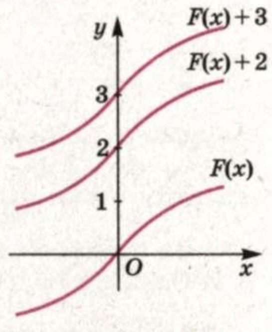
Приклади: Функція:

x^2 – первісна для $2x$, бо $(x^2)' = 2x$;

x^3 – первісна для $3x^2$, бо $(x^3)' = 3x^2$;

$\sin x$ – первісна для $\cos x$, бо $(\sin x)' = \cos x$.

Чи лише функція x^2 є первісною для $2x$? Ні. Адже $(x^2 + 3)' = 2x$, $(x^2 - 5)' = 2x$ і т. д. Отже, кожна з функцій $x^2 + 3$, $x^2 - 5$, $x^2 + \sqrt{3}$ є первісною для $2x$. Взагалі, **якщо $F'(x) = f(x)$, а C – довільне число, то кожна первісна для $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$.** Це основна властивість первісної. Геометрично це означає, що графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат (мал. 56). Далі буквою C позначатимемо довільне дійсне число.



Мал. 56

Використовуючи таблицю похідних (с. 64), складемо таблицю первісних. Радимо запам'ятати її.

$f(x)$	k (стала)	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$e^x + C$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x)$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\,x + C$	$-\mathrm{ctg}\,x + C$	$2\sqrt{x} + C$

Обґрунтувати цю таблицю можна диференціюванням функції, яка є в її другому рядку. Користуючись таблицею, можна одразу записати, що, наприклад, для функції x^8 первісною є $\frac{1}{9}x^9 + C$ і т. ін.

Виведемо кілька правил, подібних до правил диференціювання, які полегшують знаходження первісних.

I. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні для функцій $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для функції $f(x) + g(x)$.

Справді, якщо $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$, то $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

II. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k – довільне число, то $kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$.

Адже $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

III. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а k, b – довільні числа ($k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$.

Адже

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b) = \frac{1}{k}\cdot kf(kx+b) = f(kx+b).$$

Приклад. Знайдіть первісну для функції:

а) $x^4 + \cos x$; б) $5\sin x$; в) $(7x + 2)^3$.

Розв'язання. а) Для функцій x^4 і $\cos x$ первісними є відповідно $\frac{x^5}{5}$ і $\sin x$. Тому для суми даних функцій загальним виглядом первісних буде $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \sin x + C$.

б) За правилом II, $F(x) = -5\cos x + C$.

в) Одна з первісних для функції $(7x + 2)^3$, згідно з правилом III, є функція $\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+2)^4}{4}$. Загальний вигляд первісних для даної функції: $F(x) = \frac{1}{28}(7x+2)^4 + C$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке диференціювання функції?
2. Як називають операцію, обернену до диференціювання?
3. Що таке первісна функції?
4. Чому дорівнює первісна одночлена ax^n?
5. Сформулюйте теорему про первісну суми двох функцій.

Виконаємо разом

1. Знайдіть первісну для функції $f(x) = x^5 + 2x - 4$.

Розв'язання. $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{2}x^2 - 4x + C = \frac{1}{6}x^6 + x^2 - 4x + C$.

2. Доведіть, що функція $F(x) = 2\sin x + 3x$ є первісною для функції $f(x) = 2\cos x + 3$.

Доведення. $F'(x) = (2\sin x + 3x)' = 2\cos x + 3 = f(x)$.

Маємо: $F'(x) = f(x)$. Отже, за означенням, функція $F(x)$ первісна для функції $f(x)$.

3. Знайдіть для функції $y = x$ таку первісну, щоб її графік проходив через точку $P(2; 5)$.

Розв'язання. Одна з первісних для $y = x$ є функція $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Загальний вигляд усіх її первісних – функція $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Оскільки графік шуканої первісної має проходити через точку $P(2; 5)$, то $5 = \frac{2^2}{2} + C$, звідки $C = 3$.

Відповідь. Шукана первісна $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

4. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2$ м/с². Визначте швидкість руху тіла як функцію від часу t, якщо в момент $t = 0$ вона дорівнювала 3 м/с.

Розв'язання. Прискорення – похідна швидкості. Тому якщо $v(t)$ – шукана швидкість, то $v'(t) = 2$. Отже, $v(t)$ – первісна для функції 2 (сталої), тому $v(t) = 2t + C$. Оскільки $v(0) = 3$, то $3 = 2 \cdot 0 + C$, $C = 3$.

Відповідь. $v(t) = 2t + 3$.

Виконайте усно

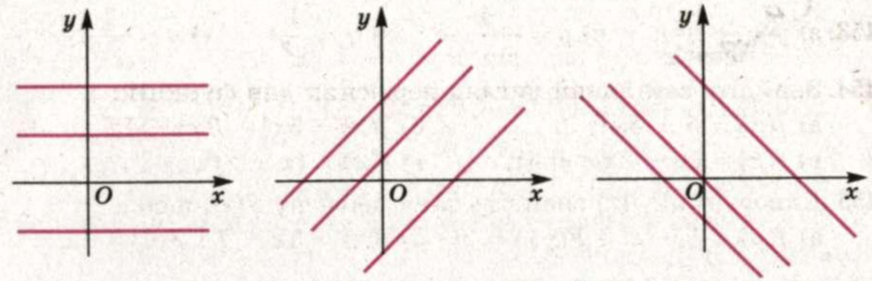
Знайдіть первісну функції (437–439).

437. а) $f(x) = x^9$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = x^{0,5}$.

438. а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 5$; г) $f(x) = \cos x$.

439. а) $f(x) = 0,5^x$; б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = x^{-2}$; г) $f(x) = -0,1$.

440. На якому з малюнків 57 зображено три первісні функції $y = 1$?



а) б) в)

Мал. 57

441. Яке з тверджень правильне:

а) графіки двох різних первісних однієї функції збігаються;

б) графіки двох різних первісних однієї функції перетинаються;

в) графіки двох різних первісних однієї функції рівні фігури?

442. Для якої функції похідна є одночасно й первісною?

А

443. Доведіть, що функція x^4 – первісна для функції $4x^3$. Чи є функція $x^4 - 5$ первісною для функції $4x^3$?

444. Знайдіть чотири довільні первісні для функції $4x^3$.

445. Доведіть, що функція $0,5x^2 + x$ – первісна для функції $x + 1$.

446. Який загальний вигляд мають первісні для функції $x + 1$?

447. Доведіть, що функція $\cos x$ – первісна для функції $-\sin x$.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (448–450).

448. а) $f(x) = 3$; б) $f(x) = 0$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = 4x^3$.

449. а) $f(x) = -5x^4$; б) $f(x) = -2x$;
в) $f(x) = x^3 - e^x$; г) $f(x) = -x^5 + e^x$.

450. а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = x^6 - 4$;
в) $f(x) = 2 + \cos x$; г) $f(x) = 3 - \sin x$.

Знайдіть первісну функції (451–453).

451. а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 5$; в) $f(x) = x^{100}$; г) $f(x) = -3$.

452. а) $f(x) = 5^x$; б) $f(x) = 10^x$; в) $f(x) = x^{-1}$; г) $f(x) = \pi$.

453. а) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; б) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; в) $y = \dfrac{1}{x^3}$; г) $y = \dfrac{1}{x^{10}}$.

454. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:
а) $f(x) = 5 + 3x^2$; б) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7$;
в) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$; г) $f(x) = (x - 2)^2$.

455. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:
а) $f(x) = 1 + x^2$ і $F(-1) = 2$; б) $f(x) = 3x - 7$ і $F(0) = 12$.

Б

456. Доведіть, що функція $y = 2x^4 + x$ є первісною для функції $y = 8x^3 + 1$.

457. Доведіть, що функція $y = e^x + ex$ є первісною для функції $y = e^x + e$.

458. Доведіть, що функція $y = 0,75x\sqrt[3]{x}$ є первісною для функції $y = \sqrt[3]{x}$.

459. Доведіть, що функція $y = 1 + 2\cos x$ є первісною для функції $y = 2\sin x$. Побудуйте в одній системі координат графіки двох інших первісних функції $y = 2\sin x$.

460. Доведіть, що функція $2\sqrt{x}$ – одна з первісних для функції $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

461. Доведіть, що функція $1 + \operatorname{tg} x$ – одна з первісних для функції $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Знайдіть загальний вигляд первісної для функції (462–464).

462. а) $y = 1 + x^9$; б) $y = 5 - x$; в) $y = 2x^3$; г) $y = -0,5x^5$.

463. а) $y = 2\sin x$; б) $y = \sin 3x$; в) $y = \cos 7x$; г) $y = 5 + \cos x$.

464. а) $y = 0,5^{2x}$; б) $y = e^{-x}$; в) $y = (3x)^{-2}$; г) $y = 5 + x^{-1}$.

465. Для якої функції первісною є функція: а) $3x^5$; б) $2\cos x$?

466. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну, щоб її графік проходив через точку P, якщо:
а) $f(x) = 1 + x^2$, $P(-3; 9)$; б) $f(x) = x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $P(0; -3)$.

467. Для функції $f(x)$ знайдіть таку первісну $F(x)$, щоб:
а) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $F(2) = 3$;
в) $f(x) = \sin x$, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 2$.

468. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)$, причому в момент часу t_0 швидкість тіла дорівнювала v_0. Знайдіть залежність швидкості тіла від часу, якщо:

а) $a(t) = 8t$, $t_0 = 5$ с, $v_0 = 120$ м/с;

б) $a(t) = 8$, $t_0 = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с.

469. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$, причому в момент часу t_0 пройдений шлях дорівнював s_0. Знайдіть залежність шляху, пройденого тілом, від часу, якщо:

а) $v(t) = 3t^2$, $t_0 = 2$ с, $s_0 = 12$ м;

б) $v(t) = 2\sin t$, $t_0 = \pi$ с, $s_0 = 2$ м.

470. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 2\sin 3x$, $f(x) = 6\cos 3x$, $x \in R$;

в) $F(x) = 4 + \mathrm{tg}\,3x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

471. Чи правильно, що функція $F(x)$ – первісна для $f(x)$, якщо:

а) $F(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$, $x \in (0; \infty)$;

б) $F(x) = 3 - x^4$, $f(x) = 3x - 0{,}2x^5 + C$, $x \in R$;

в) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 7$, $f(x) = -\frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty; 0)$?

Знайдіть первісну для функції (472–477).

472. а) $f(x) = 8e^x$; б) $f(x) = e^{2-3x}$; в) $f(x) = 2e^{5x-1}$.

473. а) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; б) $f(x) = 3^{-5x}$; в) $f(x) = 5 \cdot 2^{3x-1}$.

474. а) $y = 2\sin 7x\cos 7x$; б) $y = 2\sin^2 x - 1$.

475. а) $y = \sin^2 5x - \cos^2 5x$; б) $y = 1 + \mathrm{ctg}^2 3x$.

476. а) $y = \sin 2x\cos 13x - \cos 2x\sin 13x$; б) $y = 1 + \mathrm{tg}^2 3x$.

477. а) $y = \cos 3x\cos 7x + \sin 3x\sin 7x$; б) $y = 2\cos^2 x$.

Вправи для повторення

478. Знайдіть екстремуми функції $y = 1 - \sin x$.

479. Знайдіть точки перетину графіків функції:

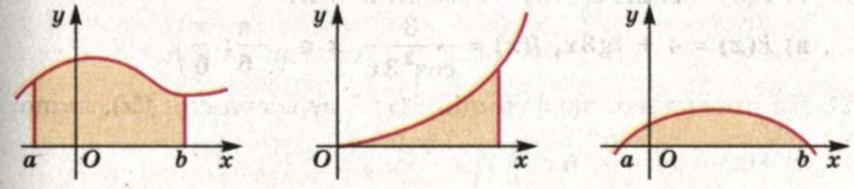
а) $y = x^2 + 3$ і $y = 4x$; б) $y = \sqrt{x}$ і $y = 0{,}5x - 4$.

480. У першому баку міститься 400 л бензину, а в другому – 900 л. Щогодини з першого бака виливають по 20 л бензину, а з другого – по 10 л. Через скільки годин у першому баку залишиться бензину в 4 рази менше, ніж у другому?

§ 14. Площа підграфіка

Поняття первісної можна застосовувати для визначення площ фігур, які досить складно знаходити без цього поняття.

Нехай на площині дано графік неперервної функції $y = f(x)$, яка на проміжку $[a; b]$ набуває тільки додатних значень. Фігуру, обмежену таким графіком, віссю абсцис і прямими $x = a$ та $x = b$, називають *підграфіком функції* $f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Кілька таких підграфіків зображено на малюнку 58. Підграфіки функцій називають ще *криволінійними трапеціями*.



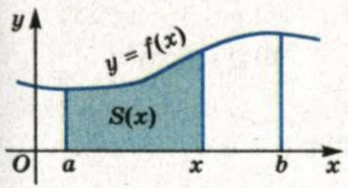
а) б) в)

Мал. 58

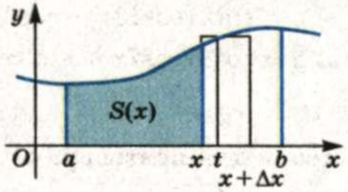
Площі підграфіків функцій можна знаходити за допомогою первісних.

Теорема 5. ***Площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.***

● **Доведення.** Розглянемо підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 59).



Мал. 59



Мал. 60

Нехай x – довільна точка з проміжку $[a; b]$, а $S(x)$ – площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; x]$. Зрозуміло, що $S(x)$ залежить від x, тобто є функцією від x. Доведемо, що $S'(x) = f(x)$. Для цього надамо змінній x приріст Δx (мал. 60), від чого функція набуде приросту $S(x + \Delta x) - S(x)$. Це площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[x; x + \Delta x]$. Вона дорівнює площі прямокутника, в якого основа – Δx, а висота – $f(t)$, де t – деяке число з проміжку $[x; x + \Delta x]$. Отже,

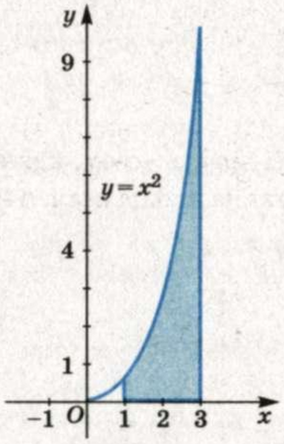
$$S(x + \Delta x) - S(x) = \Delta x \cdot f(t), \text{ звідки } \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(t).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x$ і $f(t) \to f(x)$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x), \text{ тобто } S'(x) = f(x).$$

Як бачимо, функція $S(x)$ – первісна для $f(x)$. І якщо $F(x)$ – яка-небудь інша первісна для $f(x)$, то $S(x) = F(x) + C$, де C – якесь число. Щоб визначити це число, врахуємо, що $S(a) = 0$, бо при $x = a$ підграфік функції $f(x)$ на проміжку $[a; x]$ вироджується у відрізок, площа якого дорівнює 0. Маємо $0 = F(a) + C$, звідки $C = -F(a)$. Отже, $S(x) = F(x) - F(a)$.

Якщо в знайдену рівність підставимо значення $x = b$, то матимемо рівність, яку треба було довести: площа S підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$.



Мал. 61

Значення різниці $F(b) - F(a)$ доводиться обчислювати досить часто, тому для зручності її записують ще й так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад. Знайдіть площу підграфіка функції x^2 на проміжку [1; 3].

● **Розв'язання.** Для функції x^2 первісною є $\frac{x^3}{3}$ (мал. 61).

Тому шукана площа

$$S = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Строге доведення теореми про площу підграфіка функції досить складне. Але воно варте уваги, адже в ньому – найбільше відкриття XVII ст. Детальніше про це йтиметься далі.

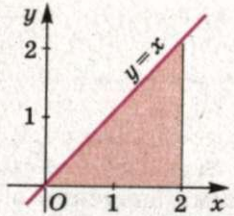
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке підграфік функції? Як його називають інакше?
2. Сформулюйте теорему про площу підграфіка функції.
3. Чим є підграфік функції $y = x$ на проміжку [0; 1]?
4. Чим є підграфік функції $y = 2$ на проміжку [0; 2]?

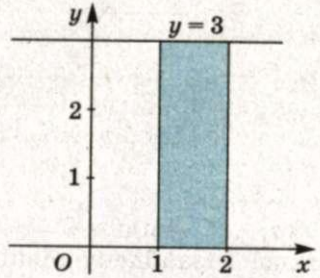
Виконаємо разом

1. Знайдіть площу підграфіка функції $y = x$ на [0; 2].

● **Розв'язання.** Підграфік цієї функції – прямокутний трикутник з катетами 2 і 2 (мал. 62). Його площа $S = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (кв. од.).



Мал. 62



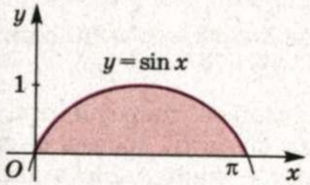
Мал. 63

2. Знайдіть площу підграфіка функції $y = 3$ на [1; 2].

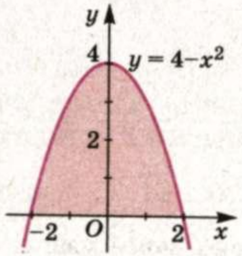
● **Розв'язання.** Підграфік цієї функції – прямокутник з вимірами 1 і 3 (мал. 63). Його площа $S = 1 \cdot 3 = 3$ (кв. од.).

3. Знайдіть площу підграфіка функції $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.

● **Розв'язання.** Первісною для функції $\sin x$ є $-\cos x$, адже $(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$. Тому шукана площа (мал. 64) дорівнює $-\cos x\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$ (кв. од.).



Мал. 64



Мал. 65

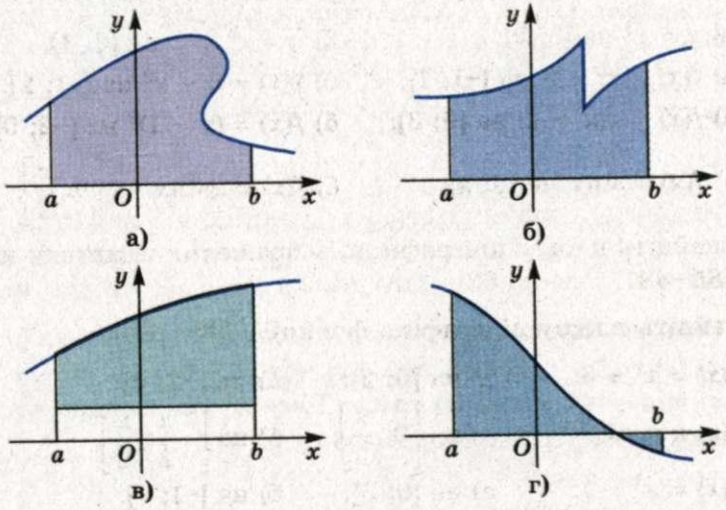
4. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ і віссю абсцис.

● **Розв'язання.** Знайдемо абсциси точок перетину графіка даної функції з віссю абсцис (мал. 65). У цих точках ординати дорівнюють 0; $0 = 4 - x^2$, звідки $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$. Отже, треба знайти площу підграфіка функції $y = 4 - x^2$ на проміжку

$[-2;\ 2]$. Первісна для даної функції $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. Тому шукана площа $S = \left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$ (кв. од.).

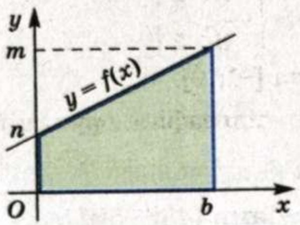
Виконайте усно

481. Які із зафарбованих на малюнку 66 фігур є підграфіком функції $y = f(x)$?

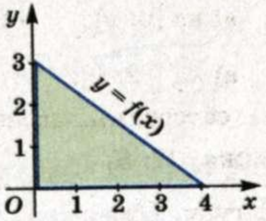


Мал. 66

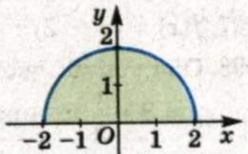
482. Укажіть кілька способів знаходження площі фігури, зображеної на малюнку 67.



Мал. 67



Мал. 68



Мал. 69

483. Дивлячись на малюнок 68, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $f(x)$ на проміжку: $[0;\ 4]$; $[2;\ 4]$; $[0;\ 2]$.

484. Дивлячись на малюнок 69, скажіть, чому дорівнює площа підграфіка функції $y = \sqrt{4 - x^2}$ на проміжку: $[-2;\ 2]$; $[0;\ 2]$.

А

Зобразіть на малюнку підграфік функції (485–487).

485. а) $f(x) = x^2$ на $[1;\ 2]$; б) $f(x) = 0{,}2x^3$ на $[0;\ 3]$.

486. а) $f(x) = \sin x$ на $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

487. а) $f(x) = x^2 + 1$ на $[-1;\ 2]$; б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0;\ 5]$.

Знайдіть площу підграфіка функції (488–491).

488. а) $y = x^3$ на $[0;\ 2]$; б) $y = x^3 + 1$ на $[0;\ 1]$.

489. а) $f(x) = x^2 + 3$ на $[-1;\ 1]$; б) $f(x) = 5 - x^2$ на $[-1;\ 2]$.

490. а) $f(x) = x(x + 4)$ на $[0;\ 3]$; б) $f(x) = (x - 1)^2$ на $[-2;\ 0]$.

491. а) $f(x) = \sin x$ на $[0;\ \pi]$; б) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

492. Знайдіть площу підграфіків, зображених вами для вправ 485–487.

Знайдіть площу підграфіка функції (493–495).

493. $f(x) = x^2 + 3$: а) на $[0;\ 2]$; б) на $[-2;\ 0]$.

494. $f(x) = \cos x$: а) на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

495. $f(x) = x^3 + 1$: а) на $[0;\ 2]$; б) на $[-1;\ 1]$.

Б

Знайдіть площу підграфіка функції (496, 497).

496. $f(x) = 1 + 2\sin x$: а) на $[0;\ \pi]$; б) на $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

497. $f(x) = (x + 2)^4$: а) на $[-2;\ 0]$; б) на $[-1;\ 0]$.

498. Обчисліть двома способами площу підграфіка функції $y = 3 + \frac{x}{2}$ на проміжку $[2;\ 6]$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (499–501).

499. а) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$ і $x = 0$;

б) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

500. а) $y = -\dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -3$; б) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

501. а) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^x$; б) $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $y = e^{-x}$.

502. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 + 2x - x^2$ і віссю абсцис.

503. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій (504–507).

504. а) $y = x^3$, $y = 10 - x$, $y = 0$; б) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

505. а) $y = -x^3$, $y = 5 + 4x$, $y = 0$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 4$.

506. а) $y = 4 - x^2$ і $y = x + 2$; б) $y = x^2$ і $y = 2x$.

507. а) $y = x^2$, $y = 6 - x$, $y = 0$; б) $y = \cos x$ і $y = \dfrac{1}{2}$.

Вправи для повторення

508. Знайдіть похідну функції:
а) $y = \ln(1 + 3x)$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - x}$; г) $y = \cos 2x$.

509. Розв'яжіть рівняння:
а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$;
б) $\ln(x + 3) + \ln 2 = 2\ln x - \ln(x - 4)$.

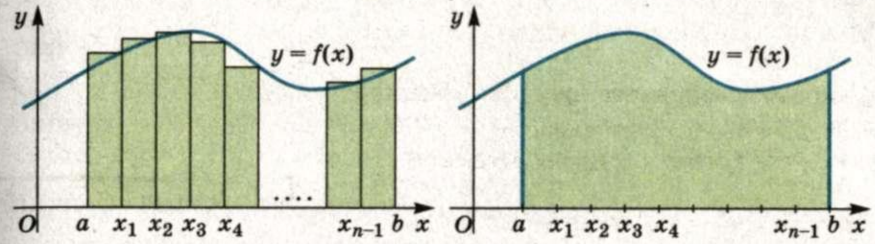
510. У класі 40 учнів. З математики в першому семестрі четверо учнів отримали 12 балів, двоє – 10 балів, десятеро – 9 балів, п'ятеро – 7 балів, а решта – 6 балів. Побудуйте відповідні стовпчасту й секторну діаграми.

§ 15. Інтеграл

Розглянемо інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

Нехай дано підграфік деякої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ (мал. 70). Поділимо відрізок $[a; b]$ точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} на n рівних відрізків: $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$. Побудуємо на першому відрізку прямокутник висотою $f(x_1)$, на другому – прямокутник висотою $f(x_2)$ і т. д. Нарешті, на n-му відрізку побудуємо прямокутник висотою $f(b)$. Утвориться східчастий многокутник, складений з n побудованих прямокутників. Якщо основа кожного такого прямокутни-

ка дорівнює Δx, то площа всього східчастого многокутника $S_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)$.



а) б)

Мал. 70

Суми такого вигляду називають *інтегральними сумами функції $f(x)$ на проміжку* $[a; b]$. Знайдену інтегральну суму можна вважати наближеним значенням площі S підграфіка функції $f(x)$ на $[a; b]$. Якщо число n прямує до нескінченності, то S_n прямує до точного значення S площі підграфіка даної функції. Пишуть:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Не лише задачі про знаходження площ підграфіків, але й багато інших досить цікавих і важливих прикладних задач зводяться до обчислення границь подібних інтегральних сум. Тому для цього поняття ввели спеціальну назву та позначення. Границю такої інтегральної суми S_n функції $f(x)$ на $[a; b]$ при необмеженому збільшенні числа n називають *інтегралом функції $f(x)$ від a до b*. Її позначають символом $\int_a^b f(x)dx$ (читають: інтеграл від a до b еф від ікс де ікс). Тут a і b – *межі інтегрування*, $\int$ – *знак інтеграла*, $f(x)$ – *підінтегральна функція*, x – *змінна інтегрування*. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Із цього випливає, що площею підграфіка функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ є $\int_a^b f(x)dx$. Оскільки вона дорівнює також $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Це – *формула Ньютона–Лейбніца*, її називають ще *основною формулою математичного аналізу*. Вона дає можливість розв'язувати багато важливих задач не обчисленням границь інтегральних сум, що досить важко, а за допомогою первісної.

Раціоналізувати обчислення часто допомагає така **властивість інтеграла**:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Справедливість цієї формули випливає з таких перетворень:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)) =$$

$$= (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНІЦ

(1646–1716)

Видатний німецький математик, фізик, філософ, організатор наукових установ. Разом з Ньютоном поділяє славу відкриття диференціального та інтегрального числень. Увів багато загальновживаних тепер математичних алгоритмів, термінів і символів.

ІСААК НЬЮТОН

(1643–1727)

Видатний англійський фізик, астроном, математик. Сформулював основні закони механіки, закон всесвітнього тяжіння. Незалежно від Лейбніца започаткував математичний аналіз.

У вивченні наук приклади корисніші від правил.

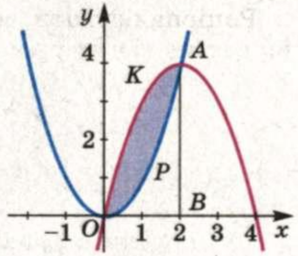
І. Ньютон

Ньютон був найвидатніший геній з усіх, що будь-коли існували.

Ж. Лагранж

Задача. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки даних функцій (мал. 71). Треба знайти площу зафарбованої фігури. Вона дорівнює різниці площ підграфіків *OBAK* і *OBAP*. Межі інтегрування – абсциси точок *O* і *A*, в яких перетинаються графіки функцій, тобто значення x, що задовольняють систему рівнянь $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$. Із цієї системи випливає рівняння $x^2 = 4x - x^2$, коренями якого є: $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.



Мал. 71

Отже, шукана площа

$$S = \int_0^2 (4x - x^2)dx - \int_0^2 x^2 dx =$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 8 - 5\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $2\frac{2}{3}$ (кв. од.).

Зауваження. Те поняття, яке в цьому підручнику названо інтегралом, у повніших курсах математичного аналізу називається *визначеним інтегралом*. Бо там розглядається ще й *невизначений інтеграл* $\int f(x)dx$, яким вважають загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$:

$$\text{якщо } F'(x) = f(x), \text{ то } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ось чому операцію знаходження первісної називають також інтегруванням.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке інтегральна сума? Наведіть приклад.
2. Що таке інтеграл функції $f(x)$ від a до b?
3. Як читають вираз $\int_a^b f(x)dx$? Назвіть його складові частини.
4. Дайте визначення формули Ньютона–Лейбніца.
5. Яке відкриття XVII ст. вважають найважливішим?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $\int\limits_0^1 (x^2+2x)dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x dx$.

Розв'язання. а) Первісною для функції $f(x) = x^2$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$, а для функції $f(x) = 2x$ – функція $F(x) = x^2$. Отже,

$$\int\limits_0^1 (x^2+2x)dx = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_0^1 2xdx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 + 1 - 0 = 1\frac{1}{3}.$$

б) Первісною для функції $f(x) = \sin x$ є функція $F(x) = -\cos x$, а для $f(x) = \sin 2x$ – функція $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Тому

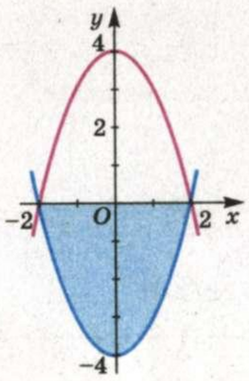
$$\int\limits_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos 2\pi - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 4$ і $y = 0$.

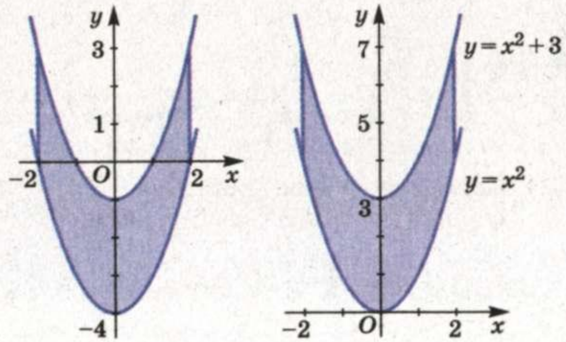
Розв'язання. Фігура, про яку йдеться в задачі, розміщена нижче від осі x (мал. 72), тому не відповідає означенню підграфіка функції. Проте вона симетрична відносно осі x підграфіка функції $y = 4 - x^2$ на проміжку $[-2; 2]$. Площі цих фігур рівні, тому

$$S = \int\limits_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$ (кв. од.).



Мал. 72



Мал. 73

3. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4$, $y = x^2 - 1$, $x = -2$, $x = 2$.

Розв'язання. Ця фігура розміщена по різні боки від осі x (мал. 73, *а*). Перенесемо її паралельно на 4 одиниці в напрямі осі y (мал. 73, *б*). Утворена фігура обмежена лініями: $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $x = -2$, $x = 2$. Її площа, отже, площа даної фігури

$$S = \int\limits_{-2}^{2} (x^2+3)dx - \int\limits_{-2}^{2} x^2dx = \int\limits_{-2}^{2} 3dx = 3x\Big|_{-2}^{2} = 12.$$

Відповідь. 12 (кв. од.).

Виконайте усно

511. Відомо, що $\int\limits_0^1 f(x)dx = 5$, $\int\limits_1^3 f(x)dx = 5$. Знайдіть:

а) $\int\limits_0^1 3f(x)dx$; б) $\int\limits_0^3 f(x)dx$; в) $\int\limits_0^3 0{,}5f(x)dx$.

512. Відомо, що $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = a$, $\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx = b$. Знайдіть:

а) $\int\limits_{-1}^{1} f(2x)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} f\big((x) + g(x)\big)dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1} 5g(x)dx$.

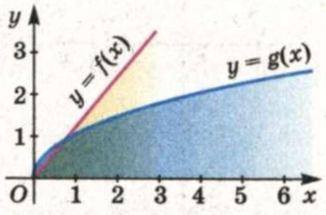
А

513. Обчисліть:

а) $\int\limits_0^1 xdx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} xdx$; в) $\int\limits_0^1 x^2dx$; г) $\int\limits_{-1}^{1} x^2dx$;

ґ) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; д) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$; е) $\int\limits_0^{\pi} \sin xdx$; є) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin xdx$.

514. Використовуючи малюнок 74, порівняйте числа a і b, якщо: $a = \int\limits_1^3 f(x)dx$, $b = \int\limits_1^3 g(x)dx$.



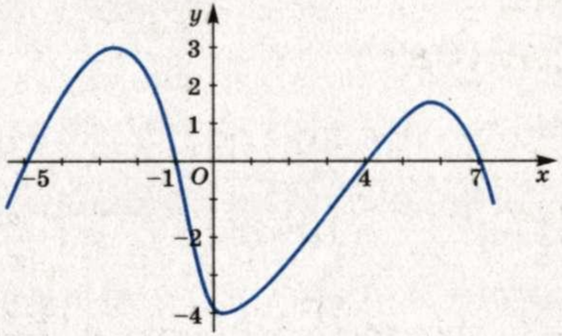
Мал. 74

515. Не обчислюючи інтеграл, порівняйте його з нулем:

а) $\int\limits_0^1 0{,}5x\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^0 x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 (1-x^2)dx$; г) $\int\limits_{-\pi}^0 \sin x\,dx$.

516. На малюнку 75 подано графік функції $y = f(x)$. Запишіть числа a, b і c в порядку зростання, якщо:

$$a = \int\limits_{-5}^{-1} f(x)dx,\ b = \int\limits_{-1}^{4} f(x)dx,\ c = \int\limits_{4}^{7} f(x)dx.$$



Мал. 75

Обчисліть інтеграл (517–520).

517. а) $\int\limits_0^1 2x\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^2 x^2dx$; в) $\int\limits_0^{1,5} 3x^3dx$.

518. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

519. а) $\int\limits_0^2 \frac{x^3}{6}dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 (4-x^2)dx$; в) $\int\limits_{-2}^0 (3x^2+1)dx$.

520. а) $\int\limits_0^1 e^x dx$; б) $\int\limits_0^1 2^x dx$; в) $\int\limits_1^e 2x^{-1}dx$.

Користуючись формулою Ньютона–Лейбніца, знайдіть площу підграфіка функції (521–523).

521. а) $f(x) = x$ на $[1;\ 2]$; б) $f(x) = \cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

в) $f(x) = x^3 + 1$ на $[-1;\ 1]$; г) $f(x) = 2\sin x$ на $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

522. а) $f(x) = x^3$ на $[1;\ 2]$; б) $f(x) = \cos 2x$ на $\left[-\frac{\pi}{4};\ 0\right]$;

в) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $[1;\ 9]$; г) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ на $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

523. а) $y = 2e^x$ на $[0;\ 1]$; б) $y = 2^x$ на $[-1;\ 2]$;

в) $y = \frac{4}{x} + 3$ на $[2;\ 6]$; г) $y = 4 - \frac{1}{x}$ на $[-6;\ -3]$.

Б

Обчисліть (524–527).

524. а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int\limits_0^1 (1+\sqrt[3]{x})dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\,dx$.

525. а) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int\limits_{-3}^{-1} (2+x)^2dx$; в) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

526. а) $\int\limits_1^2 \frac{x^3+3x^2+1}{x}dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{x^2+4x+4}{x+2}dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2x+1}dx$.

527. а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} 2\sin^2\frac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

528. Доведіть рівність:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (529–531).

529. а) $y = x^2$ і $y = 2x$; б) $y = x^2$ і $y = 2$;
в) $y = 6 + x - x^2$ і $y = 6 - 2x$; г) $y = 4x + x^2$ і $y = 4 + x$.

530. а) $y = 4x - x^2$ і $y = 4 - x$; б) $y = x^3$ і $y = x$;
в) $y = x^3$, $y = 8$ і $x = 1$; г) $y = 2x - x^2$ і $y = x^2$.

531. а) $y = 0{,}5^x$, $y = 1$, $x = -2$; б) $y = 3^{-x}$, $y = 3$, $x = 1$;
в) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = e$; г) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-1}$, $x = 0{,}5$.

532. Чи при кожному дійсному $t > 1$ справджується рівність

$$\int\limits_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t?$$

Проілюструйте її геометрично.

533. Доведіть: якщо при кожному $x \in [a; b]$ $f(x) > g(x)$, то фігура, обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, має площу

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

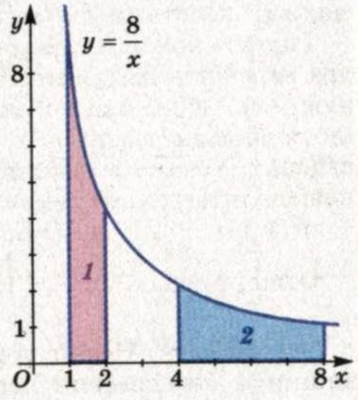
534. Доведіть, що:

а) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx;$

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ для кожного $k > 0$;

в) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ для $a < c < b$.

535. Доведіть, що площа фігури *1* дорівнює площі фігури *2* (мал. 76).



Мал. 76

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями **(536, 537)**.

536. $y = x^2 + 4x$, $y = x^2 + 4x + 3$, $x = -2$, $x = 0$.

537. $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4x + 3$, $x = 0$, $x = 4$.

Вправи для повторення

538. Знайдіть первісну функції:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = e^{-x} + x$.

539. Розв'яжіть рівняння:

а) $0{,}5^{x^2-3x+2} = 1$; б) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$;

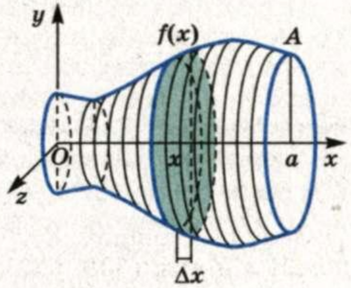
в) $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$.

540. Родина отримала нове житло у 100-квартирному будинку. Яка ймовірність того, що номер нової квартири не буде містити цифру 5?

§ 16. Застосування інтегралів

За допомогою інтегралів можна визначати не тільки площі фігур, а й багато інших величин, наближені значення яких виражаються інтегральними сумами, тобто сумами виду $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$. Такі суми коротко позначають $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Підграфік функції $f(x)$ – математична модель кожної такої величини, тому обчислювати границі цих сум також можна за формулою Ньютона–Лейбніца. Розглянемо три приклади таких задач.

1. *Об'єм тіла обертання.* Кожне тіло обертання можна уявити складеним з дуже великої кількості круглих пластинок чи циліндрів з малими висотами Δx (мал. 77).

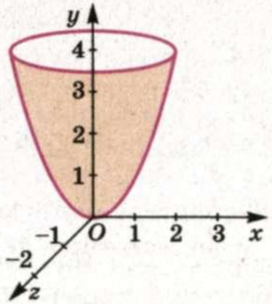


Мал. 77

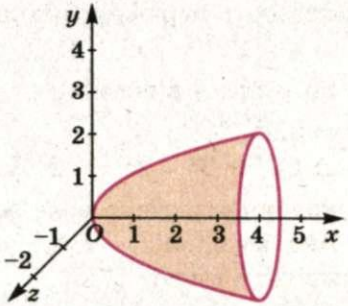
Радіус кожного такого циліндра залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм одного циліндрика, що відповідає змінній x, дорівнює $\pi f^2(x)\Delta x$. Усьому тілу обертання відповідає інтегральна сума $\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x$.

Отже, його об'єм $V = \int_0^a \pi f^2(x)dx$ або $V = \pi\int_0^a f^2(x)dx$.

Приклад. Нехай треба знайти місткість посудини заввишки 4 дм, осьовий переріз якої – графік функції $y = x^2$ (мал. 78). Для невід'ємних значень x графік такої функції симетричний відносно бісектриси першого координатного кута графіка функції $y = \sqrt{x}$. Тому шуканий об'єм посудини дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням підграфіка функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку [0; 4] навколо осі x (мал. 79).



Мал. 78



Мал. 79

Отже, шуканий об'єм

$$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_0^4 x dx = 8\pi \text{ (дм}^3\text{)}.$$

За допомогою визначених інтегралів можна обчислити об'єми не лише тіл обертання, але й багатьох інших тіл – пірамід, зрізаних пірамід тощо.

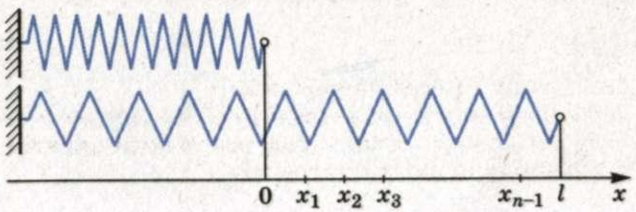
2. *Робота змінної сили.* Якщо внаслідок дії сталої сили F тіло переміщується в напрямі сили на відстань s, то виконується робота $A = Fs$. А якщо на тіло діє сила не стала, а змінна?

Приклад. Щоб розтягнути пружину на 1 см, на 2 см і т. д., треба прикладати дедалі більшу й більшу силу. Згідно із законом Гука, сила $f(x)$, яку треба прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x, пропорційна цій відстані (для допустимих значень x), тобто $f(x) = kx$. Коефіцієнт k різний для різних пружин. Наприклад, якщо для розтягнення пружини на 1 м треба прикласти силу в 50 Н, то $k = 50$.

Яку треба виконати роботу, щоб розтягнути таку пружину на відстань $l = 2$ м?

Поділимо відрізок $[0; l]$, на який розтягується пружина, точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n рівних частин (мал. 80). Нехай $l = x_n$, а Δx – довжина кожної частини. Щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$, тобто перемістити її кінець з точки 0 в x_1, треба прикласти силу $f(x_1)$. У цьому разі виконана робота наближено дорівнюватиме $\Delta x \cdot f(x_1)$. Щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1; x_2]$, треба прикласти силу $f(x_2)$ та виконати роботу, яка приблизно дорівнює $\Delta x \cdot f(x_2)$ і т. д. Отже, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$, треба виконати роботу, значення якої приблизно дорівнює інтегральній сумі

$$A_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n).$$



Мал. 80

Значення A_n зі збільшенням n (і відповідним зменшенням Δx) дедалі менше відрізнятиметься від точного значення шуканої роботи A, тобто якщо $n \to \infty$, то $A_n \to A$. Отже,

$$A = \int_0^l f(x)dx = \int_0^l kxdx = \frac{1}{2}kl^2.$$

Якщо $k = 50$, $l = 2$ м, то $A = 100$ Дж.

3. *Економічний зміст інтеграла.* Нехай функція $y = f(x)$ описує зміну продуктивності деякого підприємства протягом певного часу. Знайдемо обсяг продукції U, виробленої за проміжок часу $[0; T]$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу ($f(t)$ – стала функція), то обсяг продукції ΔU, виробленої за деякий проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ визначається формулою $\Delta U = f(t)\Delta t$. У загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U \approx f(t)\Delta t$, де $t \in [t; t + \Delta t]$, яка буде тим точніша, чим менше Δt.

Поділимо відрізок $[0; T]$ на n рівних частин точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для обсягу продукції ΔU_k, виробленої за проміжок часу $\Delta t = [t_{k-1}; t_k]$, маємо $\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$, де $t_k \in [t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже,

$$U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то кожна з використаних наближених рівностей стає точнішою, отже,

$$U = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t.$$

Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$ можна обчислити за формулою

$$U = \int_0^T f(t)dt.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які застосування інтегралів ви знаєте?
2. Як за допомогою інтеграла визначити об'єм тіла обертання?
3. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на l м?
4. Яким є економічний зміст інтеграла?

Виконаємо разом

1. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, де

t – робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

● **Розв'язання.** Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$U = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (-2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1)dt =$$

$$= \left(-\frac{2{,}53t^3}{3} + \frac{24{,}75t^2}{2} + 111{,}1t\right)\Bigg|_0^5 = -\frac{2{,}53 \cdot 125}{3} + \frac{24{,}75 \cdot 25}{2} +$$

$$+ 111{,}1 \cdot 5 = -\frac{316{,}25}{3} + \frac{618{,}75}{2} + 555{,}5 \approx 759 \text{ (од.)}.$$

2. Точка рухається прямолінійно зі змінною швидкістю $v = 10t$ м/с; за перші 4 с вона пройшла 80 м. Знайдіть закон руху точки.

● **Розв'язання.** Шуканий закон руху виражається такою функцією $s = s(t)$, що $s'(t) = 10t$. Тут $s(t)$ – первісна для функції $v = 10t$. Загальний вигляд таких первісних – $s(t) = 5t^2 + C$. Оскільки за 4 с точка пройшла 80 м, то $80 = 5 \cdot 16 + C$, звідки $C = 0$.

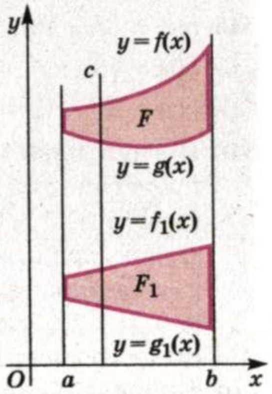
Відповідь. Шуканий закон руху точки $s(t) = 5t^2$, де t – час у секундах, $s(t)$ – відстань у метрах.

3. Доведіть твердження Кавальєрі. Якщо дві фігури можна розмістити на площині так, що кожна січна, паралельна даній прямій, перетинаючи одну з них, перетинає і другу по відрізку такої самої довжини, то площі цих фігур рівні.

● **Розв'язання.** Нехай фігуру F обмежують лінії $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ і $y = g(x)$, а фігуру F_1 – лінії $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ і $y = g_1(x)$ (мал. 81). Якщо кожна січна c, паралельна осі y, перетинає фігури F і F_1 по відрізках рівної довжини, то $f(x) - g(x) = f_1(x) - g_1(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Тоді

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx,$$

тобто площі фігур F і F_1 рівні.



Мал. 81

БОНАВЕНТУРА КАВАЛЬЄРІ

(1598–1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», в якій викладено метод неподільних. Умів розв'язувати задачі, які й тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли $\int_a^b x^n dx$ при натуральних $n < 10$. Інші його праці: «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна й логарифмічна».

А

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (541–543).

541. $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

542. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

543. $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$.

544. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої дугою кола $x^2 + y^2 = 16$, яка лежить у першій чверті, та прямими $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

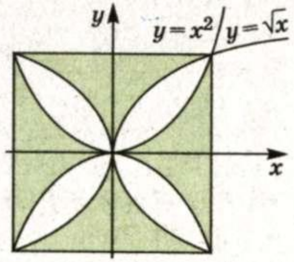
Тіло рухається зі швидкістю $v(t)$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1 до t_2 (545–547).

545. $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$.

546. $v(t) = 10t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

547. $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

548. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0{,}00645t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (грош. од./год), де t – час у годинах від початку роботи, $0 \leqslant t \leqslant 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.



Мал. 82

549. Знайдіть площу зафарбованої частини фігури, зображеної на малюнку 82.

Б

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями (550, 551).

550. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

551. $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$.

552. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

553. Для стиснення пружини на 1 см треба прикласти силу 9,8 Н. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 4 см?

554. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях проїде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

555. Знайдіть шлях, який пройде тіло від початку руху до зупинки, якщо його швидкість $v(t) = 18t - 6t^2$.

556. Швидкість руху тіла $v(t)$ з часом t змінюється за законом $v = 20 - 3t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за 4-ту секунду свого руху.

557. Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?

Вправи для повторення

558. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 2 так, щоб цифри не повторювалися? А із цифр 1; 2; 3?

559. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом 4,5 і знаменником 0,75.

560. Спростіть вираз:

а) $3^{\log_3(1-2x)}$; б) $7^{\log_7(y+1)}$; в) $9^{\log_3 x}$; г) $7^{2\log_7(y-1)}$.

Самостійна робота № 4

Варіант 1

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $f(x) = x^4 - 3x$; б) $f(x) = \cos x$.

2. Знайдіть для функції $f(x) = 3x^2 - 2$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 2).

3. Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^3$ на проміжку [0; 2] та знайдіть його площу.

4. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 3x^3dx$.

Варіант 2

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:
а) $f(x) = x^5 + 2x$; б) $f(x) = \sin x$.

2. Знайдіть для функції $f(x) = 2x + 3$ таку первісну, графік якої проходить через точку (0; 1).

3. Намалюйте підграфік функції $f(x) = x^2$ на проміжку [0; 3] та знайдіть його площу.

4. Обчисліть інтеграл $\int_0^3 4x^2dx$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте означення первісної. Наведіть приклади.
2. Що таке інтегрування?
3. Сформулюйте теорему про: а) первісну для одночлена; б) первісну для суми двох функцій.
4. Як знайти загальний вигляд первісних для функції?
5. Що таке підграфік функції? Як ще називають утворену фігуру?
6. Як знайти площу підграфіка функції на проміжку [a; b]?
7. Що називають інтегралом функції?
8. Як позначається інтеграл функції?
9. Запишіть формулу Ньютона–Лейбніца.
10. Що вважають найбільшим відкриттям XVII ст.?

Історичні відомості

Введенню поняття інтеграла передувала робота багатьох математиків. Зокрема, Архімед ще в III ст. до н. е. розробив методи для обчислення площ і об'ємів геометричних фігур, які досить схожі з методами інтегрального числення. Він розв'язував такі задачі, які й тепер розв'язують, обчислюючи інтеграли

$$\int_0^a x dx,\ \int_0^a x^2 dx,\ \int_0^a (x^2+bx)dx,\ \int_0^a \sin\varphi d\varphi.$$

Подібними методами користувався також Й. Кеплер (1571–1630). Вважаючи, що кожне тіло обертання складається з безлічі «найтонших кружечків», він визначив об'єми 92 таких тіл.

Ще далі пішов італійський математик Б. Кавальєрі. Уявляючи кожну фігуру складеною з «неподільних» (плоска фігура з відрізків, а тіло – з плоских фігур), він сформулював свої принципи (див. задачу 3 на с. 124). Аналогічне твердження правильне і для об'ємів тіл. Сам Кавальєрі вважав ці твердження очевидними та приймав їх без доведення, як принципи (лат. *principium* – початок, основа, те саме, що й аксіома). Методами сучасної математики їх можна довести як теореми.

Взагалі питання диференціального й інтегрального числення були сферою багатьох провідних математиків ще задовго до Ньютона та Лейбніца, але всі вони ці дві частини математичної науки розглядали ізольовано одна від одної. Тому ті задачі, які за допомогою формули Ньютона–Лейбніца можна розв'язати в один рядок, вони розв'язували досить громіздкими штучними методами, а багато задач і не могли розв'язати. Основна заслуга Ньютона та Лейбніца в тому, що вони пов'язали диференціальне числення з інтегральним, створивши найважливішу науку – *математичний аналіз.* Їх відкриття дало математикам і прикладникам найзручніший метод розв'язування великого класу важливих задач і створило передумови для багатьох нових відкриттів. Спеціалісти вважають відкриття математичного аналізу найбільшим у XVII ст. відкриттям людства.

МИХАЙЛО ВАСИЛЬОВИЧ ОСТРОГРАДСЬКИЙ

(1801–1862)

Всесвітньо відомий український математик, член Петербурзької, Туринської, Римської, Американської та Французької академій наук. Народився в с. Пашенна (Полтавська обл.). Досліджував проблеми математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, алгебри, теорії ймовірностей. Приятель Т. Шевченка.

Михайло Остроградський

Талантами багата Україна.
Хай навіть відбиваючись від орд,
Долаючи неволю і руїни,
Все ж геніїв народжує народ.
Один із них – Михайло Остроградський –
Великий тілом, духом і умом,
Найперший вчений у Краю Козацькім,
Властитель теорем і аксіом.
Нью-йоркський академік і туринський,
Паризький, римський – між усіх широт
Відомий математик український,
Славетний український патріот.
Ген-ген аж де від батьківської хати
Полтавець за морями побував,
Чужому научався плідно і багато,
А мови й земляків не забував.
Як брата, обіймав він Кобзаря Тараса,
З ним – українства молодий порив;
Науку вивів на найвищу трасу,
Потрібне, вічне і святе творив.
Чудовий дав інтегрування метод –
На всі часи, для всіх земель і рас;
Явився, наче ясно сяюча комета,
Що за віки являється лиш раз.
Його творіння в світі добре знані:
Десятки теорем, і формул, і думки...
Давно немає генія між нами,
Та в пам'яті він буде навіки!

Ось що писали про відкриття математичного аналізу люди різних переконань, національностей і епох.

«З усіх теоретичних успіхів знання навряд чи який-небудь вважається таким великим тріумфом людського духу, як винайдення числення нескінченно малих у другій половині XVII століття» (Ф. Енгельс).

«Аналіз нескінченно малих, безперечно, стоїть поряд з найвидатнішими завоюваннями людської культури» (О. Хінчин).

З українських учених найбільше зробили для розвитку математичного аналізу Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) і Віктор Якович Буняковський (1804–1889). Обидва народилися в Україні, навчалися в Парижі, працювали в Петербурзі й були найвідомішими математиками Російської імперії XIX ст. Зокрема, Остроградський розробив загальний метод інтегрування раціональних функцій, обґрунтував відомі тепер математикам усього світу правило Остроградського та формулу Остроградського.

Буняковський, крім іншого, перший довів нерівність

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)dx,$$

яку тепер називають *нерівністю Буняковського.*

У XX ст. в галузі математичного аналізу успішно працювали наші провідні математики С. Н. Бернштейн (1880–1963), М.П. Кравчук (1892–1942) та ін.

Головне в розділі 3

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо для кожного значення x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція x^2 є первісною для функції $2x$, бо $(x^2)' = 2x$.

Кожна первісна для функції $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з цих первісних, а C – довільне число.

Графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна сумістити паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Операцію знаходження первісних називають *інтегруванням* функції. Ця операція обернена до диференціювання.

Первісні функції $f(x)$ можна знаходити за формулами, наведеними в таблиці.

Дана функція	k (стала)	x^n $(n \ne -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x
Її первісна	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
Дана функція	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Її первісна	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – первісні для функції $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$,

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а $k \ne 0$, b – сталі, то:

$kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$;

$\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx+ b)$.

Площа підграфіка функції (або криволінійної трапеції) $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Інтегральною сумою є $\Delta x\cdot f(x_1) + \Delta x\cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x\cdot f(x_n)$.

Границю інтегральної суми $\Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$ функції $f(x)$ на $[a; b]$, якщо $n \to \infty$, називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ від a до b і позначають символом $\int_a^b f(x)dx$.

Формулу Ньютона–Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ називають також *основною формулою математичного аналізу*.

За допомогою визначених інтегралів розв'язують багато важливих задач, які зводяться до визначення границь інтегральних сум.