Що може бути простіше
за диференціальне числення!
М. Остроградський

2 Похідна та її застосування

ТЕМИ РОЗДІЛУ

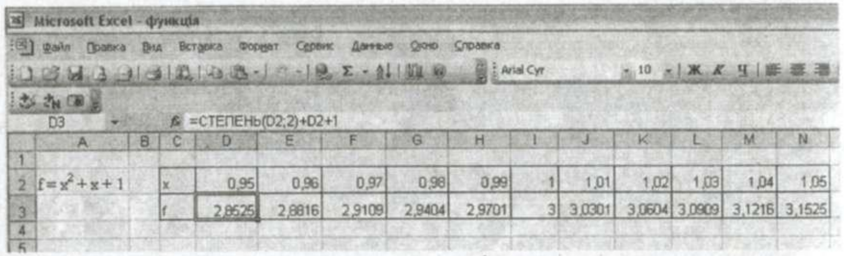
- Поняття про неперервність і границю функції в точці.
- Похідна функції; її геометричний і фізичний зміст.
- Таблиця похідних.
- Правила диференціювання.
- Похідна складеної функції.
- Ознаки сталості, зростання й спадання функції. Екстремуми функції.
- Застосування похідної для дослідження функцій та побудови графіків.
- Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування задач прикладного змісту.

§ 6. Границя функції

Часто говорять про значення функції в точці, границю функції в точці, приріст функції в точці, неперервність функції в точці. Про які точки йдеться? Про точки осі абсцис – значення аргументу.

Значення функції в точці. Нехай задано, наприклад, функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо $x = 1$, то відповідне значення функції дорівнює 3. Кажуть, що в точці $x = 1$ значення функції $f(x)$ дорівнює 3. У точці $x = 0$ її значення дорівнює 1, у точці $x = 10$ значення функції $f(x)$ дорівнює 111. Пишуть: $f(1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(10) = 111$.

Границя функції в точці. Візьмемо ту саму функцію $f(x) = x^2 + x + 1$. Якщо значення її аргументу x досить близько і з обох боків наближаються до 1, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3. Про це свідчать дані таблиці (мал. 26), у якій містяться значення функції $y = x^2 + x + 1$ для 10 значень аргументу, близьких до числа 1, і графік, зображений на малюнку 27.


Microsoft Excel - функція

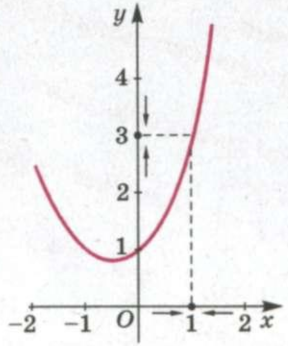
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10

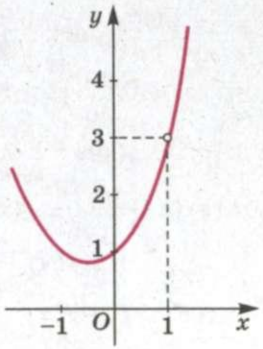
D3 =СТЕПЕНЬ(D2;2)+D2+1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	$f=x^2+x+1$		x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
3			f	2,8625	2,8816	2,9109	2,9404	2,9701	3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525
4														
5														

Мал. 26



Мал. 27



Мал. 28

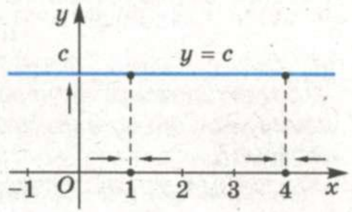
Іншими словами: різниця $|f(x) - 3|$ може стати і залишатись як завгодно малою, якщо різниця $|x - 1|$ буде досить малою. У цьому разі кажуть, що границя функції $f(x)$ у точці $x = 1$ дорівнює 3. Пишуть: якщо $x \to 1$, то $f(x) \to 3$, або $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

Істотна деталь: функція може мати границю навіть у такій точці, в якій вона не визначена. Наприклад, функція $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ у точці $x = 1$ не має значення, бо знаменник не може дорівнювати нулю. В усіх інших точках функція $\varphi(x)$ має такі самі значення, як і функція $f(x)$, бо $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$. Графік функції $\varphi(x)$ зображено на малюнку 28. Хоч значення функції $\varphi(x)$ у точці $x = 1$ не існує, її границя в цій точці існує і дорівнює 3.

Означення границі функції можна сформулювати так.

Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ, що для всіх значень x із проміжку $(a - \delta; a + \delta)$, крім, можливо, самої точки $x = a$, справджується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пишуть: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Мал. 29

Примітка. Означення границі функції досить важке, тому його можна не запам'ятовувати.

Границя функції в точці має такі властивості.

- Функція не може мати двох різних границь у точці.
- Якщо c – число, то $\lim\limits_{x\to a} c = c$ (мал. 29).
- Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$, для яких характерні рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\big(kf(x)\big) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Останню властивість можна сформулювати іншими словами.

Границя суми (різниці, добутку) функцій дорівнює сумі (різниці, добутку) границь цих функцій. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню їхніх границь, якщо границя дільника не дорівнює нулю.

Ці властивості використовують для обчислення границь функцій у заданих точках.

Приклад. За умови, що $x \to 5$, обчисліть границю функції $f(x)$, якщо: а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = x^2 - 10x + 17$.

● **Розв'язання.**

а) $\lim\limits_{x\to 5}(2x+3) = \lim\limits_{x\to 5} 2x + \lim\limits_{x\to 5} 3 = 2\lim\limits_{x\to 5} x + 3 = 2\cdot 5 + 3 = 13.$

б) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2 - 10x + 17) = \lim\limits_{x\to 5} x^2 + \lim\limits_{x\to 5}(-10x) + \lim\limits_{x\to 5} 17 =$

$= (\lim\limits_{x\to 5} x)^2 - 10\cdot\lim\limits_{x\to 5} x + \lim\limits_{x\to 5} 17 = 5^2 - 10\cdot 5 + 17 =$

$= 25 - 50 + 17 = -8.$

Зауваження. Розв'язуючи такі вправи, деякі перетворення можна виконувати усно.

Знаходження границь суттєво спрощується для ***неперервних функцій*** – функцій, графіком яких є неперервна лінія. Для них виконується співвідношення

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Тобто *границя неперервної функції в кожній точці проміжку, на якому функція неперервна, дорівнює її значенню в цій точці.*

Запам'ятайте! Неперервними в кожній точці числової прямої є всі цілі раціональні функції. Дробово-раціональні та ірраціональні функції неперервні в кожній точці області визначення.

Докладно теорію границь функцій розглядають у курсі вищої математики.

Приріст аргументу і функції. Нехай дано, наприклад, функцію $f(x) = x^2$. У точці $x_0 = 2$ її значення $f(2) = 4$. Збільшимо значення аргументу на 0,01, тобто нехай $x = 2{,}01$. Відповідне значення функції $f(2{,}01) = 4{,}0401$. Порівняно з попереднім значенням воно збільшилося на 0,0401. Тут 0,01 – *приріст аргументу*, а 0,0401 – відповідний *приріст функції*, а саме: приріст функції $f(x) = x^2$ на проміжку [2; 2,01].

Приростом аргументу в точці $x_0 = a$ називають різницю $x - a$, де x – довільне число, яке мало відрізняється від a. Він може бути додатним або від'ємним. Відповідним приростом функції $f(x)$ є різниця $f(x) - f(a)$.

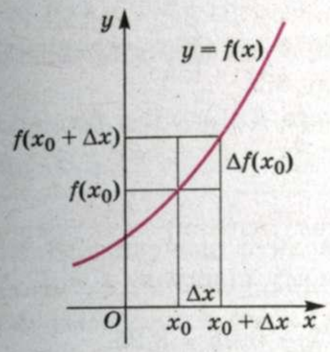
Приріст аргументу x позначають символом Δx, а приріст функції Δf, Δy (читають: дельта ікс, дельта еф, дельта ігрек).

Ці записи не означають добутки. У розглянутому прикладі $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta f = 0{,}0401$.

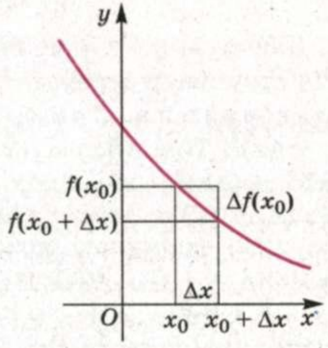
Геометрично приріст аргументу зображається приростом абсциси точки кривої, а приріст функції – приростом ординати цієї точки (мал. 30). Властивості цих понять видно на малюнках 30 і 31.

Якщо $y = f(x)$ – зростаюча і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ – число додатне.

Якщо $y = f(x)$ – спадна і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x)$ – число від'ємне.



Мал. 30



Мал. 31

Теорія границь – великий і важливий розділ курсу математичного аналізу, який вивчається в університетах. Він є основою для вивчення похідної та її застосувань – могутнього апарату для дослідження багатьох реальних процесів. У школі цей матеріал вивчають оглядово, на основі наочних уявлень та інтуїції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке границя функції в точці?
2. Що таке приріст аргументу? Як його позначають?
3. Що таке приріст функції? Як його позначають?
4. Сформулюйте властивості границі функції в точці.
5. Які властивості приросту функції ви знаєте?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

● **Розв'язання.** а) У точці $x = 3$ функція $y = \sqrt{x+1}$ неперервна, тому її границя дорівнює значенню функції в цій точці, а саме: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2.$

б) У точці $x = 1$ функція не визначена, але дріб $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ можна скоротити: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2.$

Оскільки для обчислення границі функції при $x \to 1$ саму точку $x = 1$ можна вилучити й не розглядати, то

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x - 2) = \lim_{x \to 1} x - 2 = 1 - 2 = -1.$$

2. Для функції $y = x^2$ знайдіть приріст функції, якщо значення аргументу переходить від 3 до 3,5.

● **Розв'язання.** Спосіб 1. Маємо $f(x) = x^2$, а $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Тоді $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Отже, $\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

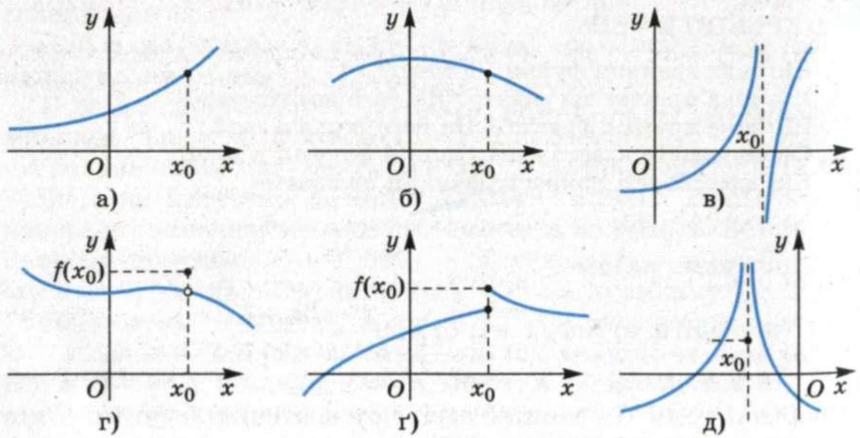
За цією формулою можна обчислити значення $\Delta f(x)$ для будь-яких x і Δx. Зокрема, у нашому прикладі $x = 3$, $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

Тому $\Delta f(x) = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25$.

Спосіб 2. $f(3) = 3^2 = 9$, а $f(3{,}5) = 3{,}5^2 = 12{,}25$. Отже, $\Delta f(x) = f(3{,}5) - f(3) = 12{,}25 - 9 = 3{,}25$.

Виконайте усно

201. Яка з функцій, графіки яких зображені на малюнку 32, є неперервною: 1) на всій області визначення; 2) на проміжку $(-\infty; 0)$; 3) на проміжку $(0; \infty)$?



Мал. 32

202. Для кожної з функцій, графіки яких зображені на малюнку 32, встановіть: а) чи визначена ця функція в точці x_0; б) чи існує границя функції в точці x_0 і чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

203. Чи має функція $y = 5x$ границю в точці: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = -0{,}2$?

204. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 0$, якщо:
а) $f(x) = x - 5$; б) $f(x) = x^2 - x + 7$;
в) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$; г) $f(x) = 3x^2 - x$.

А

205. Дано функції $f(x) = x^2 - x + 1$ і $\varphi(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть її.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$\varphi(x)$							

206. Відомо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 3$.

Обчисліть:
а) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + \varphi(x) - g(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(2f(x) - \varphi(x) + g(x)\right)$;
в) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \cdot g(x)\right)$; г) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi^2(x) \cdot g(x)\right)$.

207. Обчисліть границю функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 1$, якщо:
а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = 3x^2 - x + 1$; в) $f(x) = \dfrac{5}{x - 3}$.

208. Обчисліть границю функції $y = \varphi(x)$ у точці $x_0 = 2$, якщо:
а) $\varphi(x) = 3x^3 - x$; б) $\varphi(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$; в) $\varphi(x) = x^2 - 7x + 3$.

Обчисліть границі (209–212).

209. а) $\lim\limits_{x \to 10}(12x - 30)$; б) $\lim\limits_{x \to 5}(8 - 3x)$; в) $\lim\limits_{x \to 5}(2x + 0{,}5)$.

210. а) $\lim\limits_{x \to 5}(2x^2 - 5)$; б) $\lim\limits_{x \to 1}(1 - 3x^3)$; в) $\lim\limits_{x \to 0}(2x + 5x^2)$.

211. а) $\lim\limits_{x \to 0}(2 + x + x^2)$; б) $\lim\limits_{x \to 1}(7 - 3x^2)$; в) $\lim\limits_{x \to 3} x(x + 5)$.

212. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 1}{x + 5}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x}{x^2 - 5}$; в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2}{7}$.

213. Знайдіть приріст аргументу в разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:
а) $x_0 = 1$, $x = 1{,}3$; б) $x_0 = 3$, $x = 3{,}5$; в) $x_0 = 2{,}1$, $x = 2{,}7$.

214. Знайдіть приріст функції $y = 3x + 1$ у разі переходу від точки x_0 до точки x, якщо:
а) $x_0 = 2,\ x = 2{,}3$; б) $x_0 = 5,\ x = 5{,}5$; в) $x_0 = 2{,}5,\ x = 2{,}7$.

215. Для функції $y = 0{,}5x - 3$ знайдіть x і Δy, якщо:
а) $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}2$; б) $x_0 = 3,\ \Delta x = 0{,}4$;
в) $x_0 = 2{,}1,\ \Delta x = 0{,}9$.

216. Для функції $y = 10x - 1$ знайдіть Δx і Δy, якщо:
а) $x_0 = 1,\ x = 1{,}2$; б) $x_0 = 3,\ x = 3{,}1$; в) $x_0 = 2{,}1,\ x = 2{,}5$.

Б

217. Відомо, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 2$. Обчисліть:

а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)+1}{g(x)-\varphi(x)}$; б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2f(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$;

в) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{2-5\varphi(x)}$; г) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)\cdot\varphi(x)}$.

Обчисліть границі (218–220).

218. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

219. а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$; б) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$.

220. а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

221. Обчисліть границю функції $f(x)$ у точці, в якій функція не визначена, якщо:

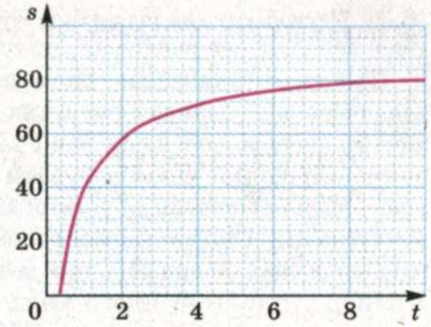
а) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; б) $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$; в) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

222. Для функції $y = 5 + x^2$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

223. Знайдіть границю відношення приросту функції $y = f(x)$ до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, якщо:
а) $f(x) = -x + 3$; б) $f(x) = 3x^2$; в) $f(x) = x^3 + 1$.

224. Кількість мишей у колонії записували щотижня і побудували відповідний графік (мал. 33). Визначте середню швидкість зростання популяції мишей:
а) з 4-го по 6-й тиждень; б) за перші 5 тижнів.

Мал. 33



Мал. 34

225. На малюнку 34 подано графік руху тіла $s(t)$ (шлях s у км, час t у год). Визначте середню швидкість руху за час t, якщо: а) $1 \leqslant t \leqslant 4$; б) $4 \leqslant t \leqslant 8$.

226. Відомо, що для деякої фірми витрати на випуск x одиниць продукції описуються функцією $K(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}3x^2 + 20x + 100$ (грн.), а дохід, одержаний від реалізації x одиниць продукції, можна обчислити за формулою $R(x) = 200x - 0{,}05x$ (грн.). Визначте приріст витрат і доходу для збільшення випуску одиниць продукції:
а) з 20 до 100; б) з 30 до 50.

227. За деякими підрахунками визначено, що фірма, випускаючи x одиниць продукції щомісяця, має витрати $K(x)$, що виражаються формулою $K(x) = 150 + 30x$ (грн.), а дохід $R(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї самої продукції, становить $R(x) = 90x - 0{,}02x^2$ (грн.). Якщо фірма збільшить щомісячний випуск продукції з 300 до 320 одиниць, як зміняться її: а) витрати; б) дохід; в) прибуток?

Вправи для повторення

228. Розміри прямокутника – 20 м і 10 м. Довжину кожної сторони цього прямокутника збільшили на 10 %. Знайдіть площу утвореного прямокутника.

229. Розв'яжіть нерівність:
а) $|x - 1| < 2$; б) $|x + 3| > 4$; в) $2|x - 3| < 5$; г) $|2x + 3| > 5$.

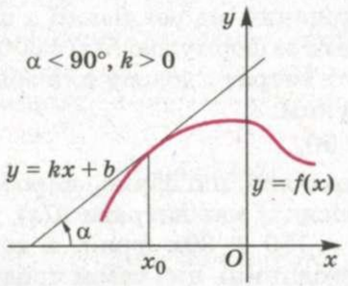
230. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x-y}$; в) $\dfrac{x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

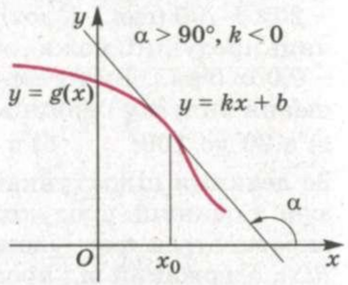
§ 7. Дотична до графіка функції. Похідна

Багатьом фахівцям часто доводиться досліджувати функції, тобто з'ясовувати, за яких умов та чи інша функція зростає чи спадає, за яких набуває найменшого чи найбільшого значення тощо. Досліджувати функції найкраще за допомогою *похідної* чи тісно пов'язаної з нею *дотичної* до графіка функції. Скористаємося спочатку інтуїтивним уявленням про дотичну. Згадайте, що дотична до кола – це пряма, яка лежить у площині цього кола і має з ним тільки одну спільну точку.

На малюнках 35 і 36 зображено графіки неперервних функцій $f(x)$ і $g(x)$ та дотичні, проведені до них у точках x_0. Дотична до кривої – це пряма. Її рівняння має вигляд $y = kx + b$, де k – *кутовий коефіцієнт*, $k = \mathrm{tg}\alpha$ (якщо $k \neq 0$, то α – кут між променем дотичної, розміщеним вище від осі x, і додатним напрямом цієї осі).



Мал. 35



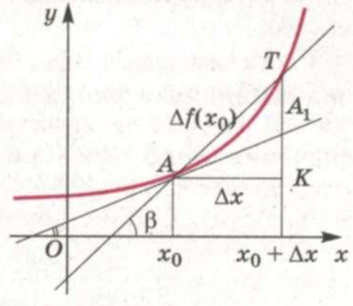
Мал. 36

Зверніть увагу на кутовий коефіцієнт k дотичної, проведеної до графіка функції в його точці з абсцисою x.

Якщо число x_0 належить проміжку зростання функції, то відповідне значення k додатне (мал. 35). Якщо x_0 належить проміжку спадання функції, то відповідне значення k від'ємне (мал. 36). І навпаки, якщо кожному значенню x із деякого проміжку $(a; b)$ відповідає додатне значення k, то на $(a; b)$ дана функція зростає; якщо кожному значенню x з деякого проміжку $(c; d)$ відповідає від'ємне значення k, то на $(c; d)$ функція спадає. Заслуговують на увагу і ті точки графіка функції, в яких дотична не існує і в яких вона паралельна осі x, тобто коли її кутовий коефіцієнт дорівнює 0.

Отже, для дослідження функцій важливо вміти визначати кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка. Розглянемо детальніше зв'язок цього коефіцієнта з досліджуваною функцією.

Нехай дано графік функції $y = f(x)$ і на ньому точку A, в якій існує дотична до графіка (мал. 37). Якщо абсциса точки A дорівнює x_0, то її ордината – $f(x_0)$. Надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx. Нарощеному значенню аргументу $x_0 + \Delta x$ на графіку функції відповідає точка T з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$.



Мал. 37

Через точки A і T проведемо прямі AK і TK, паралельні осям абсцис і ординат; вони перетнуться в деякій точці K. Тоді $AK = \Delta x$ – приріст аргументу, а $TK = \Delta y$ – приріст функції на $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Кутовий коефіцієнт січної AT дорівнює тангенсу кута β, тобто відношенню Δy до Δx:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо приріст аргументу Δx зменшувати так, щоб він прямував до нуля, то січна AT, повертаючись навколо точки A, наближатиметься до прямої AA_1. Таку пряму AA_1 – граничне положення січної AT при $\Delta x \to 0$ – називають *дотичною до графіка* даної функції в точці x_0.

Якщо $\Delta x \to 0$, то міра кута β прямує до α, а тангенс кута β – до $\mathrm{tg}\alpha$. Тобто, якщо k – кутовий коефіцієнт цієї дотичної і $\Delta x \to 0$, то

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \mathrm{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

До обчислення значення виразу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ чи $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ приводять розв'язування багатьох задач із механіки, електрики, біології, економіки, статистики тощо. Саме тому цей вираз отримав спеціальну назву – *похідна*.

Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

Похідну функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$. Її означення записують також у вигляді рівності

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ або } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$ у точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = 3$ приріст Δx. Відповідний приріст функції $\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$. Отже,

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Відповідь. $f'(3) = 6$.

Так розв'язують задачу, користуючись означенням похідної функції в точці.

Досі йшлося про похідну функції в точці. А можна розглядати похідну функції і як функцію. Нехай, наприклад, дано функцію $y = x^2$. Знайдемо її похідну в довільній точці x. Для цього надамо значенню x приріст Δx. Відповідний йому приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$. Маємо

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, похідна функції x^2 у кожній її точці x дорівнює $2x$. Пишуть: $(x^2)' = 2x$, або якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Зверніть увагу! Похідна функції в точці – це число. Але коли говорять про похідну, не вказуючи «в точці», мають на увазі похідну як функцію: **похідною функції $y = x^2$ є функція $y' = 2x$**, похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$ і т. д.

Знаючи це, похідну функції в точці можна обчислювати простіше, ніж за означенням похідної функції в точці.

Приклад 2. Дано функцію $f(x) = x^2$. Знайдіть $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(-2)$.

Розв'язання. Похідною функції $f(x) = x^2$ є функція $f'(x) = 2x$. Тому $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$; $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Лінійна функція $y = ax + b$ має похідну в кожній точці x. Її похідна

$$y' = (ax + b)' = a.$$

Зокрема, $x' = 1$; $a' = 0$.

Запам'ятайте! Похідна сталої дорівнює нулю. В кожній точці дотична до графіка функції $y = a$, де a – стала, паралельна осі x.

Дотичною до прямої є ця сама пряма. З курсу планіметрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k – кутовий коефіцієнт прямої. Оскільки для дотичної до графіка функції $y = f(x)$ кутовий коефіцієнт дорівнює значенню похідної в точці дотику, то можемо записати *рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці дотику $(x_0; y_0)$*:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Зверніть увагу: $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$ (див. мал. 35).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення похідної функції в даній точці.
2. Чим є похідна функції в точці?
3. Чим є похідна функції на проміжку?
4. Що розуміють, кажучи «похідна – це коефіцієнт дотичної»?
5. Чому дорівнює похідна сталої?
6. Що означає запис $(ax + c)' = a$? Який його геометричний зміст?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що для кожного дійсного числа k та аргументу x $(kx^2)' = 2kx$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції kx^2 дорівнює $k(x + \Delta x)^2 - kx^2$. Спростимо цей вираз: $k(x + \Delta x)^2 - kx^2 = k(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2) = k\Delta x(2x + \Delta x)$.

Отже, $(kx^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(2x + \Delta x) = 2kx.$

2. Доведіть, що для будь-якого значення x, відмінного від нуля, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}.$$

Отже, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x \cdot \Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$

3. Доведіть, що для функції $y = x^3$ похідною є функція $y' = 3x^2$.

Доведення. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x^2$. А це означає, що похідною функції $y = x^3$ є функція $y' = 3x^2$.

4. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x = 5$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Знайдемо $f'(x)$, $f'(x_0)$ і $f(x_0)$:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x;\ f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10;\ f(x_0) = 5^2 = 25.$$

Підставимо знайдені значення в рівняння дотичної. Маємо:

$$y = 10(x - 5) + 25, \text{ або } y = 10x - 25.$$

Відповідь. $y = 10x - 25$.

Виконайте усно

231. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 2 + 0{,}5x$; г) $y = 2$.

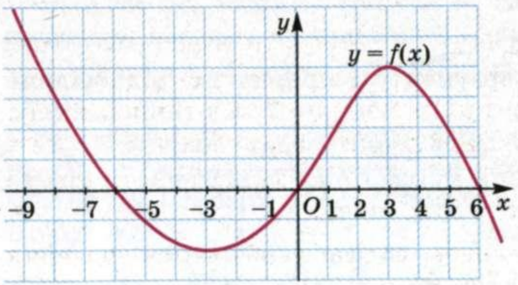
232. Знайдіть значення похідної функції $y = 2x + 5$ у точці:
а) $x = 2$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = 100$.

233. Знайдіть значення похідної функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = 1$; б) $x = 0$; в) $x = 10$; г) $x = -10$.

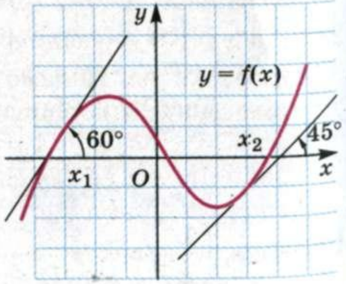
234. Чому дорівнює похідна функції:
а) $y = 5$; б) $y = x$; в) $y = x^2$; г) $y = x^3$?

А

235. Укажіть кілька точок, у яких дотична до графіка функції $f(x)$ (мал. 38) утворює з додатним напрямом осі x:
а) гострий кут; б) тупий кут.



Мал. 38



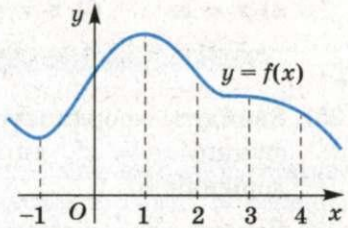
Мал. 39

236. Укажіть проміжки, на яких кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$ (див. мал. 38) набуває:
а) додатних значень; б) від'ємних значень.

237. Які кутові коефіцієнти мають дотичні до графіка функції $\varphi(x)$ (мал. 39), проведені в точках x_1, x_2?

238. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $\varphi(x)$ (див. мал. 39), проведений у деякій точці, дорівнює k. Чи існують точки, в яких: а) $k < 0$; б) $k = 0$?

239. Визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, проведеної до графіка функції (мал. 40) у точках з абсцисами $-0{,}5$; $0{,}5$; $1{,}5$; $2{,}5$.



Мал. 40

240. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 40) визначте наближені значення її похідної в точках x, що дорівнюють: -1, 0, 1, 2, 3, 4.

241. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, заданої рівнянням:
а) $y - x + 5 = 0$; б) $x + 2y + 3 = 0$; в) $3x - 5y = 1$.

242. Функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $(-3; 5)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в кожній точці проміжку $(-3; 2)$ додатний, а в кожній точці проміжку $(2; 5)$ – від'ємний. Знайдіть проміжки зростання та спадання цієї функції.

243. Обчисліть похідну функції $y = 5x$ у точці $x = 2$; в довільній точці x.

244. Обчисліть похідну функції $y = 3x + 5$ у точці $x = 4$; в довільній точці x.

245. Знаючи, що $(x^2)' = 2x$, обчисліть похідну функції $y = x^2$ у точці:
а) $x = -2$; б) $x = 3$; в) $x = 10$; г) $x = -2{,}5$.

246. Побудуйте графік функції $y = 2x^2$ і проведіть до нього дотичну в точці з абсцисою x_0. Користуючись малюнком, визначте знак кутового коефіцієнта дотичної, якщо: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 1$. Скориставшись формулою $(kx^2)' = 2kx$, знайдіть точне значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $y = x^2$ у цих точках.

247. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідних функцій $f(x)$ у точках $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$, якщо:
а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = 0{,}5x^2$; в) $f(x) = 3x^2$.

248. Знаючи, що $(x^3)' = 3x^2$, обчисліть похідну функції $y = x^3$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = 5$; в) $x = 10$; г) $x = -1{,}5$.

249. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці:

а) $x = 2{,}5$; б) $x = -2{,}5$; в) $x = \sqrt{5}$.

250. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у його точці з абсцисою:

а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

Б

251. Знайдіть координати точки дотику дотичної до графіка функції $y = x^2$, якщо кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює 6.

252. Доведіть за допомогою означення, що для функції $y = \sqrt{x}$ похідною буде функція $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

253. Користуючись попередньою задачею, обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{x}$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = 4$; в) $x = 36$; г) $x = 625$.

254. Користуючись задачею 2 (с. 61), обчисліть значення похідної функції $y = \frac{1}{x}$ у точці:

а) $x = 1$; б) $x = -4$; в) $x = 5$; г) $x = 10$.

255. Перепишіть у зошит подану нижче таблицю похідних найпоширеніших функцій і вивчіть її напам'ять.

$$a' = 0;\ x' = 1;$$
$$(ax + b)' = a;$$
$$(x^2)' = 2x;\ (x^3)' = 3x^2;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

256. Доведіть, що похідна заданої функції набуває невід'ємних значень при всіх допустимих значеннях аргументу:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = \sqrt{x}$.

257. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{6}{x}$ у точці:

а) $x = -1$; б) $x = -2$; в) $x = 3$; г) $x = 6$.

Вправи для повторення

258. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 6x = 0$; б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

259. Спростіть вираз:

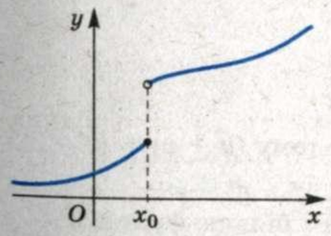
а) $(1 - \mathrm{tg}^2 x)\cos^2 x$; б) $(\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{tg}\,x)\sin 2x$.

260. Порівняйте значення виразів:

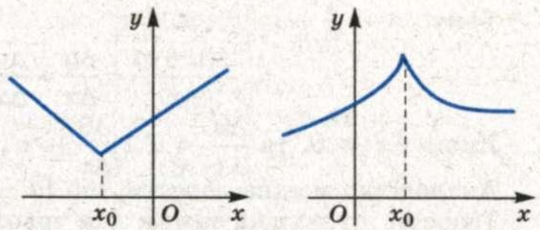
а) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ і $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

§ 8. Диференціювання функцій

Ви вже вмієте знаходити похідні деяких функцій, користуючись означенням похідної. Далі доведемо кілька теорем, які дають змогу порівняно легко і швидко визначати похідні багатьох інших функцій. Треба, однак, мати на увазі, що не кожна функція має похідну в кожній точці. Наприклад, не мають похідних функції в точках розриву (мал. 41), у точках зламу (мал. 42) та в кінцевих точках області визначення функції. Але ми розглядаємо тільки такі функції, графіки яких – неперервні лінії, без точок зламу.



Мал. 41



Мал. 42

Операцію визначення похідної функції називають *диференціюванням*. Якщо функція має похідну в деякій точці (в кожній точці деякого проміжку), то говорять, що дана функція *диференційовна* в цій точці (на цьому проміжку). Кожний многочлен і кожна з функцій $\sin x$ і $\cos x$ диференційовні в кожній точці області визначення, тобто на всій множині дійсних чисел R.

Для доведення першої теореми скористаємося тотожністю

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

У її правильності можна переконатися, перемноживши многочлени в правій частині.

Теорема 1 (про похідну одночлена). ***Для кожного натурального n і дійсного k в кожній точці x***

$$(kx^n)' = kn \cdot x^{n-1}.$$

● **Доведення.** Надамо змінній x приріст Δx. Відповідний приріст функції дорівнює $k(x+\Delta x)^n - kx^n$.

Отже, шукана похідна

$$(kx^n)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x)^n - kx^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k((x+\Delta x)^n - x^n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x - x)((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} k((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}) =$$

$$= k(x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x\cdot x^{n-2} + x^{n-1}) = kn\cdot x^{n-1}.$$

Приклади. $(5x^3)' = 5\cdot 3x^2 = 15x^2$; $(-2x^4)' = -2\cdot 4\cdot x^3 = -8x^3$.

Теорема 2 (про похідну суми). ***Якщо функції u та v диференційовні в точці x, то в цій точці $(u+v)' = u' + v'$.***

● **Доведення.** Знайдемо приріст $\Delta(u+v)$ суми даних функцій на $[x; x+\Delta x]$:

$$\Delta(u+v) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x) =$$
$$= (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Тому

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$ і $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, тому $(u+v)' = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u-v)' = u' - v'$.

Теорема правильна також для трьох і більше функцій.

Наприклад,

$(u+v-w)' = ((u+v)-w)' = (u+v)' - w' = u' + v' - w'$.

Теорема 3 (про похідну добутку). ***Якщо функції u та v диференційовні в точці x, то $(uv)' = u'v + uv'$.***

● **Доведення.** Знайдемо приріст $\Delta(uv)$ добутку даних функцій на $[x; x+\Delta x]$, врахувавши, що $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$ і $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$:

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) = \big(u(x)+\Delta u\big)\big(v(x) + \Delta v\big) - u(x)\cdot v(x) = \Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.$$

Тому

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u\cdot v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} \to 0$, бо $\Delta v \to 0$.

Отже,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.* Адже якщо $u = C$, де C – сталий множник, то $u' = 0$ і за теоремою про похідну добутку $(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'$, тобто $(Cv)' = Cv'$.

Теорема 4 (про похідну частки). ***Якщо u та v – функції від x, диференційовні в точці x, причому в цій точці $v \neq 0$, то***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Існують формули, за допомогою яких знаходять похідні й багатьох інших функцій. Їх подано в таблиці похідних.

Таблиця похідних

$c' = 0$, c – const	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax+b)' = a$	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	
$(x^3)' = 3x^2$	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x\ln a$	$(e^x)' = e^x$

Кожна з цих формул доведена ще в XVII ст. Ви можете спробувати довести їх самостійно.

Розглянемо на конкретних прикладах, як наведені формули застосовуються в процесі розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^5\cdot\sin x$.

● **Розв'язання.** $f'(x) = (x^5\cdot\sin x)' = (x^5)'\sin x + x^5(\sin x)' = 5x^4\sin x + x^5\cos x$.

Приклад 2. Доведіть, що $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

● **Доведення.**

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = 5x + \ln x$.

● **Розв'язання.** $y' = (5x + \ln x)' = (5x)' + (\ln x)' = 5 + \dfrac{1}{x}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке диференціювання функції?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми двох функцій.
3. Як знаходять похідну добутку двох функцій?
4. Як знаходять похідну частки?
5. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?
6. Як знаходять похідні тригонометричних функцій?
7. Чому дорівнює похідна функції $y = \log_a x$?
8. Чому дорівнює похідна функції $y = a^x$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^5(1 - x^2)$.

● **Розв'язання.** Спосіб 1. Скористаємося теоремою про похідну добутку:

$$f'(x) = \left(3x^5(1 - x^2)\right)' = (3x^5)' \cdot (1 - x^2) + 3x^5 \cdot (1 - x^2)' =$$
$$= 15x^4(1 - x^2) + 3x^5(-2x) = 15x^4 - 15x^6 - 6x^6 = 15x^4 - 21x^6.$$

Спосіб 2. Спочатку розкриємо дужки, а потім застосуємо теорему про похідну суми.

$$f'(x) = \left(3x^5(1 - x^2)\right)' = (3x^5 - 3x^7)' = 15x^4 - 21x^6.$$

2. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = \dfrac{x+12}{3x}$ у точці $x_0 = 4$.

● **Розв'язання.**

$$f'(x) = \left(\frac{x+12}{3x}\right)' = \frac{(x+12)' \cdot 3x - (x+12)(3x)'}{9x^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot 3x - (x+12) \cdot 3}{9x^2} = \frac{3x - 3x - 36}{9x^2} = -\frac{4}{x^2};\ f'(4) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

3. Обчисліть значення похідної функції $y = 3\sin x + 5\cos x$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

● **Розв'язання.** Скористаємося теоремою про похідну суми:

$$y' = (3\sin x + 5\cos x)' = (3\sin x)' + (5\cos x)' = 3(\sin x)' + 5(\cos x)' =$$
$$= 3\cos x - 5\sin x.$$

Якщо $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, то

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} - 5\sin\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

4. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^4 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

● **Розв'язання.** Рівняння дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Знайдемо $f(-2)$ та $f'(-2)$:

$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20;$

$f'(x) = (x^4 + x^2)' = 4x^3 + 2x;\ f'(-2) = 4(-2)^3 + 2(-2) = -36.$

Отже, $y = -36(x + 2) + 20$ або $y = -36x - 52$.

Виконайте усно

Знайдіть похідну функції (261–264).

261. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{17}$; в) $y = 2x^5$; г) $y = 0{,}1x^{10}$.

262. а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 + \cos x$; в) $y = 4\mathrm{tg}\,x$; г) $y = x + \mathrm{ctg}\,x$.

263. а) $y = 2e^x$; б) $y = e^x + 5$; в) $y = e$; г) $y = -e^x$.

264. а) $y = 3^x$; б) $y = 5\ln x$; в) $y = -\lg x$; г) $y = x^{-2}$.

265. Знайдіть значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо:

а) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$; б) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 2\pi$.

266. Чи правильно, що похідна функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ набуває лише від'ємних значень? А функції $y = \cos x$?

А

Знайдіть похідну функції (267–270).

267. а) $f(x) = 5x^4$; б) $f(x) = 0{,}8x^5$; в) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^6$;

г) $f(x) = -x$; г) $f(x) = -2x^9$; д) $f(x) = -0{,}3x^5$.

268. а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 7 - x^3$;

в) $f(x) = x^4 + 9x^2$; г) $f(x) = 3x^4 - x^8$.

269. а) $f(x) = 2(x^3 - 7)$; б) $f(x) = 0{,}2(5 - 3x^4)$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{3}$; г) $f(x) = \dfrac{40 - 3x^5}{5}$.

270. а) $y = 3x^2 - 5x + 7$; б) $y = 2 - 3x - 8x^2$;

в) $y = x^4 + 3x^3 - 5x + 4$; г) $y = 5 - 2x + 7x^2 - 3x^3$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (271–273).

271. $f(x) = x^2 - 5x$, $x = 1$; $x = 0$; $x = -2$.

272. $f(x) = 3x^4 + 2x - 10$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$.

273. $f(x) = -8x + 3$, $x = -2$; $x = 0$; $x = \pi$.

Знайдіть похідну функції (274, 275).

274. а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = 3\cos x + 2$; в) $y = 4\mathrm{tg}x - 3$;
г) $y = \sin x + 2x$; ґ) $y = \cos x + 3x$; д) $y = \mathrm{tg}x + 4x$.

275. а) $y = x^2 + \cos x$; б) $y = x^4 - \sin x$; в) $y = x^5 + \mathrm{tg}x$;
г) $y = \sqrt{x} + \mathrm{ctg}x$; ґ) $y = \sqrt{x} - \sin x$; д) $y = \sqrt{x} + \cos x$.

Обчисліть значення похідної в даних точках (276, 277).

276. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = 4\mathrm{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

277. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \mathrm{tg}x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Знайдіть похідну функції (278–280).

278. а) $y = 7e^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = \pi^x$;
г) $y = (\sqrt{2})^x$; ґ) $y = 4^x - x$; д) $y = 0{,}5^x + 1$.

279. а) $y = 8\ln x$; б) $y = -\ln x$; в) $y = \lg x$;
г) $y = \log_2 x$; ґ) $y = 2\lg x$; д) $y = 3 - \lg x$.

280. а) $y = x^{2,5}$; б) $y = -x^{0,5}$; в) $y = 2x^{1,7}$; г) $y = -x^e$.

Визначте двома способами похідну функції (281–283).

281. а) $y = x^2(x^3 - 5)$; б) $y = x^3(3x^2 - 1)$;
в) $y = (x - 2)(x + 3)$; г) $y = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$.

282. а) $y = 3x^2(5 - x^3)$; б) $y = -7x(x^2 - 4)$;
в) $y = 5(x + 3)^2$; г) $y = (2x - 7)^2$.

283. а) $f(x) = (x^4 - 2)x^3$; б) $f(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
в) $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)$; г) $f(x) = (x - 1)^3 - x + 1$.

284. Заповніть таблицю «Правила диференціювання».

Функція	Похідна
$f(x) + \varphi(x)$	
$C \cdot f(x)$	
$f(x) \cdot \varphi(x)$	
$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$	

285. Заповніть таблицю «Формули диференціювання».

$f(x)$	C	x	x^2	x^n	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}x$
$f'(x)$									

Б

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 (286–288).

286. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; $x_0 = -2$.

287. $y = x^2 + 1$, $x_0 = 0$; $x_0 = -4$.

288. $y = 3x^4 + 2x$, $x_0 = -2$; $x_0 = 0$.

Знайдіть похідну функції (289, 290).

289. а) $f(x) = x^3\cos x$; б) $f(x) = (2x - 1)\sin x$.

290. а) $f(x) = x^3\sin x$; б) $f(x) = \sin x\cos x$.

Визначте двома способами похідну функції (291, 292).

291. а) $y = (1 - x)\sin x$; б) $y = (x + 3)\cos x$; в) $y = x(2 + \mathrm{ctg}x)$.

292. а) $y = (x^2 + 1)\cos x$; б) $y = (\sqrt{x} - 1)\sin x$; в) $y = \sqrt{x}(\mathrm{tg}x - 3)$.

Обчисліть (293–295).

293. $f'(0{,}5\pi)$, якщо: а) $f(x) = x^2 + x + \sin x$; б) $f(x) = x + x^2\sin x$.

294. $f'(\pi)$, якщо: а) $f(x) = 1 + x + \cos x$; б) $f(x) = x(1 + \cos x)$.

295. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, якщо: а) $f(x) = x\cos x + \frac{x^2}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{x}{\cos x} - \frac{x^2}{3}$.

Знайдіть похідну добутку функцій (296, 297).

296. а) $y = x \cdot \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$; в) $y = x^5 \cdot e^x$.

297. а) $y = e^x \cdot 2x$; б) $y = x^6 \cdot \ln x$; в) $y = 2^x \cdot \cos x$.

Знайдіть похідну частки (298, 299).

298. а) $y = \frac{2}{x+1}$; б) $y = \frac{x-3}{x}$;
в) $y = \frac{\cos x}{5x}$; г) $y = \frac{x^2}{5-x}$.

299. а) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x-3}$; б) $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2-1}$;
в) $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$; г) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$.

Знайдіть похідну заданої функції в точці $x_0 = 1$ **(300–302)**.

300. а) $y = e^x + x^e$; б) $y = x^2 + \ln x$; в) $y = x - \log_2 x$.

301. а) $f(x) = xe^x$; б) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$; в) $f(x) = e^x + \ln x$.

302. а) $f(x) = x\ln x$; б) $f(x) = 2^x + \ln x$; в) $f(x) = x^{-1} + \ln x$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у його точці з абсцисою x_0 **(303, 304)**.

303. а) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

304. а) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; б) $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 2$.

305. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x$; б) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

в) $y = \sin 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$; г) $y = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

Напишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в його точці з абсцисою x_0 **(306, 307)**.

306. а) $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = 4\text{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

307. а) $y = \sin x + \cos x$, $x_0 = \pi$; б) $y = \text{tg}x - \cos x$, $x_0 = \pi$.

Вправи для повторення

308. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2$; б) $y = -2x^2$; в) $y = 2 + x^2$.

309. Спростіть вираз:

а) $\cos 3x - \cos 5x$; б) $\sin 10x - \sin 6x$.

310. Розв'яжіть рівняння:

а) $2^{3x+1} = 4^x$; б) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = 16$.

§ 9. Похідна складеної функції

Досі розглядалися похідні функцій, аргументами яких є змінна x, наприклад $y = x^n$, $y = \sin x$. А як знаходити похідні функцій $y = (2x + 1)^{10}$, $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$? Кожну з них можна розглядати як функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$, тобто $y = f(h(x))$. Таку функцію називають *складеною*, $u = h(x)$ – її внутрішньою функцією, а $f(u)$ – зовнішньою.

Розглядаючи у функції $y = f(u)$ змінну u як аргумент, можна знайти похідну цієї функції по u. Її позначатимемо

знаком y'_u. Похідні функцій по x, як і раніше, позначатимемо символами y', u'.

Нехай дано функцію $y = f(u)$, де $u = h(x)$. Якщо в якійсь точці x існує похідна u' та у відповідній точці u існує похідна y'_u, то існує також похідна y', причому $y' = y'_u \cdot u'$.

Строге доведення цієї теореми важке, тому обмежимося тільки його схемою. Похідна y' дорівнює границі відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$. Вважаючи, що $\Delta u \neq 0$, помножимо чисельник і знаменник цього відношення на Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то й $\Delta u \to 0$, бо йдеться про функцію $u = h(x)$, диференційовну в точці x. Тому якщо $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$$

і з рівності (*) випливає доводжувана рівність $y' = y'_u \cdot u'$.

Досі йшлося про похідну y' в якійсь фіксованій точці x. Якщо ж дана складена функція $y = f(h(x))$ диференційовна в кожній точці x деякого проміжку, то рівність $y' = y'_u \cdot u'$ справджується для всього проміжку. Отже, користуючись цією рівністю, можна знаходити похідну даної функції і як функцію, задану на цьому проміжку.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = (2x + 1)^{10}$.

Розв'язання. Це функція $y = u^{10}$, де $u = 2x + 1$. Ці функції диференційовні на R, $y'_u = 10u^9$, $u' = 2$.

Отже, $y' = 10u^9 \cdot 2 = 20u^9 = 20(2x + 1)^9$.

Не обов'язково, розв'язуючи такі вправи, вводити змінну u. Її можна тільки уявляти й одразу писати, наприклад:

$(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$;

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Якщо функція містить логарифм складного виразу, то перш ніж знаходити її похідну, доцільно цей вираз прологарифмувати.

Приклад 2. Знайдіть похідну функції

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right).$$

Розв'язання. $\ln\left(\frac{x^2}{(x+2)(x-3)}\right) = \ln x^2 - \ln((x + 2)(x - 3)) =$

$= 2\ln x - \ln(x + 2) - \ln(x - 3)$. Отже,

$$y' = (2\ln x - \ln(x + 2) - \ln(x - 3))' = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}.$$