

Рекомендована література

1. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / Упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бевз В.Г. Історія математики. – Харків, 2006.
3. Бевз Г.П. Математика в школах України. – К., 2009.
4. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
5. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
6. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі. – Харків, 2008.
7. Василенко О. Серенада математиці. – Харків, 2003, 2009, 2010, 2011.
8. Василенко О.О. Жінки й математика. – Харків, 2008.
9. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
10. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, 2008. – Кн. 1, 2.
11. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
13. Демянов В. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
14. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.
15. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
16. Кованцов М.І. (редактор). Математична хрестоматія. – К., 1977.
17. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
18. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
19. Конфорович А., Сорока М. Остроградський.. – К., 1980.
20. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
21. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
22. Маркова І.С. (упорядник). Математика після уроків. – Харків, 2004.
23. Математика в школі : Журнал.
24. Математика в школах України : Журнал.
25. Математична газета.
26. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
27. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
28. Тадеев В.О. Математика. Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1999.
29. У світі математики. – 1968–1991. – Вип. 1–20.
30. У світі математики : Журнал.
31. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
32. Шляхами математики / Упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
33. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.
34. Шмігевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
35. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика, 10–11 класи. – К., 2005.
36. Тадеев В.О. Геометрія, 11 клас. – Тернопіль, 2004.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Аналіз математичний 128
Апофема піраміди 224
Аргумент функції 6
Бічна поверхня конуса 245
– – піраміди 225
– – призми 218
– – циліндра 239
Бічні грані піраміди 224
– – призми 217
– – ребра піраміди 224
Варіанта 149
Варіаційний ряд 149
Вектори 194
Великий круг кулі 251
Величина випадкова 176
Вершина конуса 244
– многогранника 212
– піраміди 224
Вибірка 149
Висота конуса 244
– піраміди 224
– призми 217
– циліндра 238
Вісь конуса 244
Властивості логарифмів 30
– логарифмічної функції 32
– об'ємів 262
– показникової функції 16
– степенів 14
Вписані тіла 257
Геометричне тіло 211
Геометричний зміст похідної 59
Геометрія 3
Гістограма 156
Границя функції 50
Грань многогранника 212
Графік функції 6
Дисперсія 177
Диференціал 98
Диференціювання 65
Діагональ призми 218
Діагональний переріз піраміди 224
– – призми 218
Діаграма 155
Діаметр кулі 251
Додекаедр правильний 231
Дослідження функції 78
Дотична 58
– до графіка функції 58
Експонента 17
Екстремум функції 79
Елемент множини 133
Загальний вигляд первісних 101
Застосування векторів 200
– інтегралів 121
– похідної 78
Змінна інтегрування 113
Знаходження первісних 101
Значення функції 50
– екстремальні 79
– – найбільші 86
– – найменші 86
Зрізана піраміда 226
Зрізаний конус 245
Імовірність класична 168
– статистична 175
Інтеграл 112
– визначений 115
– невизначений 115
Інтегральна сума 113
Інтегрування 101
Комбінаторика 138
Комбінаторні задачі 138
Комбінації 145
– тіл 257
Конічна поверхня 245
Конус 244
Координати вектора 194
– точки 189
Координатні осі 189
Криволінійна трапеція 107
Критичні точки функції 78
Куб 218
Куля 251
Кут між векторами 200
Кутовий коефіцієнт 58
Логарифм 30
– десятковий 32
– натуральний 32

- Максимум функції 79
Математичне сподівання 177
Медіана вибірки 150
Межі інтегрування 113
Миттєва швидкість 91
Мінімум функції 79
Многогранник 212
– описаний 258
– опуклий 212
– правильний 230
Множина 133
– впорядкована 138
– нескінчена 133
– порожня 133
– скінчена 133
Мода вибірки 150
Модуль вектора 195
Неперервність функції 52
Нерівність логарифмічна 39
– показникова 24
Об'єднання множин 134
Об'єм конуса 268
– куба 262
– кулі 270
– паралелепіпеда 263
– піраміди 268
– призми 263
– циліндра 264
Область визначення функції 6
– значень функції 6
Ознака зростання функції 78
– максимуму функції 79
– мінімуму функції 79
– спадання функції 78
Октаедр правильний 231
Описані тіла 258
Основа логарифма 30
– конуса 244
– піраміди 224
– призми 217
– циліндра 238
Основна логарифмічна тотожність 30
Паралелепіпед 218
– прямий 218
Первісна 101
Переріз множин 134
– многогранника 213
- Перестановки 145
Період функції 7
Півкуля 251
Підграфік функції 107
Підмножина 133
Піраміда 224
– правильна 224
Площа поверхні конуса 245
– – многогранника 212
– – піраміди 225
– – призми 218
– – сфери 253
– – циліндра 239
Подія випадкова 165
– достовірна 166
– елементарна 167
– неможлива 166
Полігон 156
Похідна 59
– добутку 66
– логарифмічної функції 67
– одночлена 66
– показникової функції 67
– складеної функції 72
– сталої 61
– степеневої функції 67
– суми 66
– тригонометричної функції 67
– функції в точці 59
– частки 67
– як швидкість 91
Правило добутку 139
– знаходження первісних 102
– суми 138
Призма похила 217
– пряма 217
Приріст аргументу 52
– функції 52
Проміжки зростання функції 78
– спадання функції 78
Радіус конуса 244
– кулі 251
– циліндра 239
Рівняння логарифмічне 37
– площини 201
– показникове 23
– сфери 202
Різниця множин 134
Робота змінної сили 122
- Розгортка конуса 244
– многогранника 212
– циліндра 239
Розмах вибірки 149
Розміщення 144
Розподіл імовірностей 176
– нормальний 184
Середнє значення вибірки 150
– квадратичне 150
Система координат 189
Статистика 149
– математична 149
Січна площа 212
Скалярний добуток векторів 200
Степінь числа 14
– з дійсним показником 14
Сума векторів 195
Сфера 252
Твірна конуса 244
– циліндра 238
Теорема про похідну добутку 66
– – – одночлена 66
– – – суми 66
– – – частки 67
Тетраедр 212
– правильний 212
Тіло геометричне 211
– обертання 237
Точка екстремуму 79
– максимуму 79
– мінімуму 79
Умови існування екстремумів 79
Факторіал 140
Фігура обертання 238
Формула Ньютона–Лейбніца 114
Формули диференціювання 67
Функція 6
– диференційовна в точці 65
– зростаюча 7
– логарифмічна 31
– непарна 7
– неперервна в точці 52
– обернена 32
– парна 7
– періодична 7
– підінтегральна 113
– показникова 15
– складена 72
– спадна 7
– степенева 15
Центр кулі 251
– правильного многогранника 230
Циліндр 238
Частота відносна 175
Частотна таблиця 149
Число e 17

Довідковий матеріал¹

Закони дій

$$\begin{aligned} a + b &= b + a; & (ab)c &= a(bc); \\ (a + b) + c &= a + (b + c); & a(b + c) &= ab + ac. \\ ab &= ba; \end{aligned}$$

Властивості дробів

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}, \quad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}, \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

Формули скороченого множення

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2); \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2); \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

Степені та корені

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & (ab)^n &= a^n b^n; & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; & \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k; \\ a^m : a^n &= a^{m-n}; & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; & \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n^2]{a}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; & & & & & \end{aligned}$$

Логарифми

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y, & a^{\log_a x} &= x, \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y, & \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}, \\ \log_a x^p &= p \log_a x, & \log_a x &= \frac{1}{\log_x a}. \\ \log_a a &= 1, \log_a 1 = 0, & & \end{aligned}$$

Стандартний вигляд числа

$x = a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$,
 n – порядок числа x .

Рівняння

Рівняння $ax = b$ має:
1 корінь, якщо $a \neq 0$;
0 коренів, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$;
безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$.

Квадратні рівняння

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &- \text{рівняння;} \\ D = b^2 - 4ac &- \text{дискримінант;} \\ x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \\ ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2); \\ x^2 + px + q = 0 &- \text{зведене рівняння,} \\ x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &- \text{його корені;} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} &- \text{теорема Вієта.} \end{aligned}$$

Трансцендентні рівняння

$$\begin{aligned} a^x &= b; & x &= \log_a b; \\ \log_a x &= b; & x &= a^b; \\ \sin x &= a; & x &= (-1)^n \arcsin a + \pi n; \\ \cos x &= a; & x &= \pm \arccos a + 2\pi n; \\ \operatorname{tg} x &= a; & x &= \operatorname{arctg} a + \pi n. \end{aligned}$$

Нерівності

$a > b$, якщо число $a - b$ додатне.
 $a < b$, якщо число $a - b$ від'ємне.

¹ Формулами позначені бази зазначення умов за яких вони істинні.

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$.

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.

Якщо $a < b$ і $e < d$, то $a + c < b + d$.

Якщо $0 < a < b$ і $0 < c < d$, то $ac < bd$.

Прогресії

Арифметична прогресія: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots$

$$b_n = b_1q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$S_n = \frac{b_1}{q - 1}, \text{ якщо } |q| < 1.$$

Функції

$y = kx + b$ – лінійна; графік – пряма.

$y = ax^2 + bx + c$ – квадратична; графік – парабола з вершиною в точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

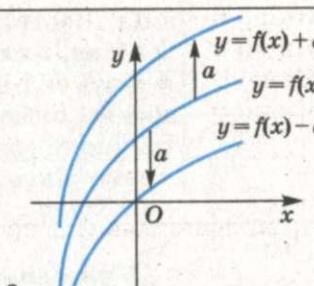
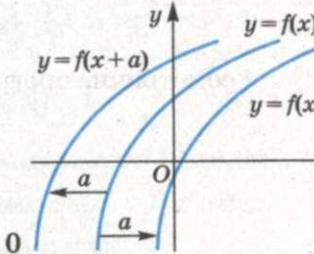
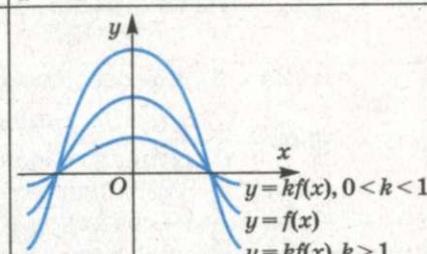
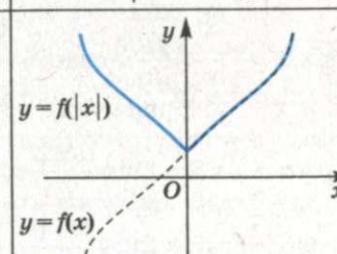
$y = x^2$ – степенева.

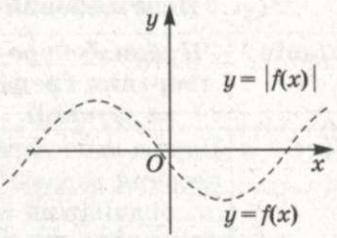
$y = a^x$ – показникова.

$y = \log_a x$ – логарифмічна.

$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ – тригонометричні.

Перетворення графіків функцій

Функція	Правило перетворення графіка функції	Графічна ілюстрація
$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення вздовж осі ординат на $ a $: вгору, якщо $a > 0$; вниз, якщо $a < 0$	
$y = f(x + a)$	Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $ a $: праворуч, якщо $a < 0$; ліворуч, якщо $a > 0$	
$y = kf(x)$	Розтяг від осі абсцис у k разів, якщо $k > 1$. Стиск до осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $k > 1$.	
$y = f(x)$	Частину графіка, який лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін і симетрично відображаємо його відносно осі ординат. Графіком функції буде об'єднання цих двох кривих: $y = f(x), x \geq 0$ і $y = f(-x), x < 0$	

$y = f(x) $	Частину графіка, який лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Частину графіка, який лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис
	

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Похідна
Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$.

$C' = 0$	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)' = Cu'$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(u + v)' = u' + v'$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u u'$.

Первісна та інтеграл

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а $k \neq 0$, b – сталі, то:

$kF(x)$ – первісна для функції $kf(x)$,

$\frac{1}{k} F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$.

Функція	0	k	x^n , $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$
Одна з її первісних	C	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	$2\sqrt{x}$	$-\cos x$

Функція	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
Одна з її первісних	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона–Лейбніца.

Комбінаторика

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n,$$

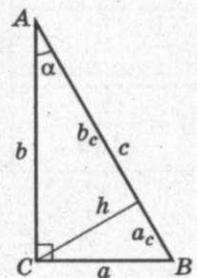
$$P_n = n!,$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1),$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$



Прямокутний трикутник

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad a^2 + b^2 = c^2;$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad a^2 = a_c \cdot c;$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha; \quad b^2 = b_c \cdot c;$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha; \quad h^2 = a_c \cdot b_c;$$

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch; \quad S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha; \quad h = \frac{ab}{c};$$

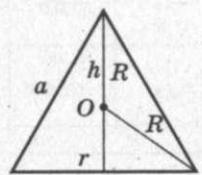
$$R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Рівносторонній трикутник

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3}h; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{2}{3}h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$R = 2r; \quad h = R + r.$$



Довільний трикутник

$$S = \frac{1}{2}ah; \quad S = \frac{1}{2}abs \in \gamma;$$

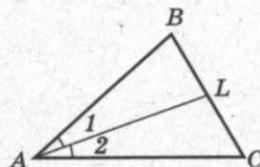
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (формула Герона);}$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha};$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (теорема косинусів);}$$

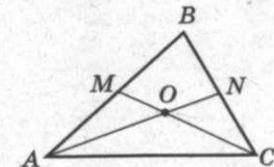
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ (теорема синусів).}$$



AL – бісектриса

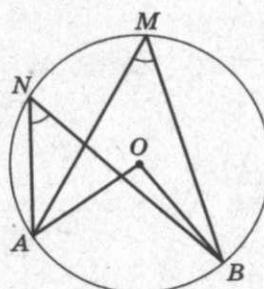
$$1) \angle 1 = \angle 2;$$

$$2) \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$



AN, CM – медіани

$$AO : ON = 2 : 1.$$



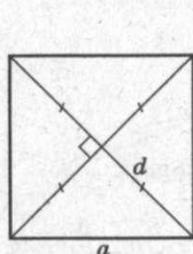
Коло

$$C = 2\pi r;$$

$$S = \pi r^2;$$

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \overarc{AB};$$

$$\angle AMB = \angle ANB.$$



Квадрат

$$d = a\sqrt{2};$$

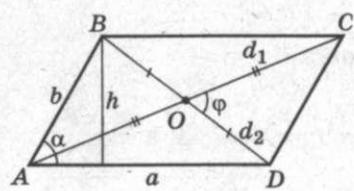
$$r = \frac{a}{2};$$

$$P = 4a;$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$S = a^2;$$

$$S = \frac{1}{2}d^2.$$



Паралелограм

$$\angle A + \angle B = 180^\circ;$$

$$P = 2(a+b);$$

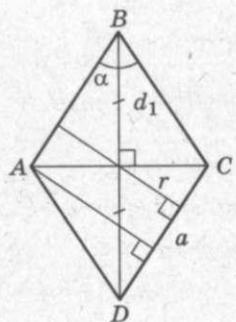
$$S = ah;$$

$$S = ab \sin \alpha;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \phi;$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Ромб



$$P = 4a;$$

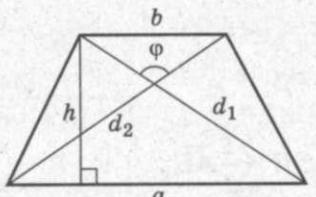
$$S = ah;$$

$$S = a^2 \sin \alpha;$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2;$$

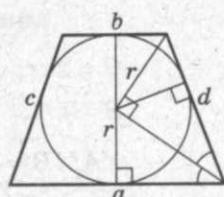
$$r = \frac{1}{2}h.$$

Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

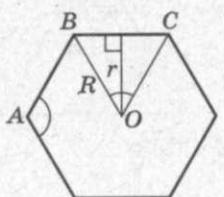
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi;$$



$$a + b = c + d;$$

$$h = 2r.$$

Правильний многокутник



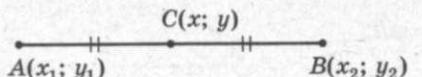
$$\text{Сума кутів: } 180(n-2); \quad P = na;$$

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \quad S = \frac{1}{2}arn;$$

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n}; \quad S = \frac{1}{2}R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Координати на площині



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 - \text{рівняння кола з центром } O(a; b) \text{ радиусом } R$$

Координати в просторі

Нехай дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$.

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – координати точки C – середини відрізка AB .

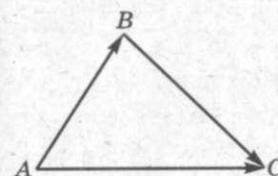
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - \text{довжина відрізка } AB.$$

$$ax + by + cz + d = 0 - \text{загальне рівняння площини.}$$

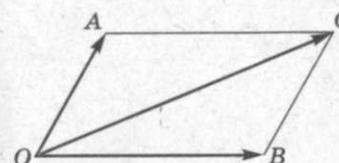
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 - \text{рівняння площини, яка проходить через точку } M(x_0; y_0; z_0) \text{ перпендикулярно до вектора } \vec{n} = (a; b; c).$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 - \text{рівняння сфери радіуса } R \text{ з центром у точці } (a; b; c).$$

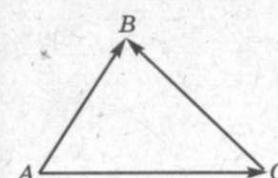
Вектори



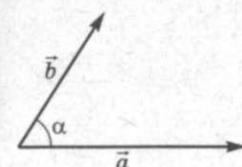
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \text{додавання векторів за правилом трикутника.}$$



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \text{додавання векторів за правилом паралелограма.}$$



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} - \text{різниця векторів.}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha - \text{скалярний добуток векторів } \vec{a} \text{ і } \vec{b}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – умова перпендикулярності векторів \vec{a} і \vec{b} .

$\vec{a} = \lambda \vec{b}$ – умова колінеарності векторів \vec{a} і \vec{b} .

Вектори, задані координатами

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – координати вектора \overrightarrow{AB} , де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тоді

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2);$$

$$k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1);$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ – умова колінеарності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ – умова перпендикулярності ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} .

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина вектора $\vec{a} = (x; y; z)$.

$$\cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

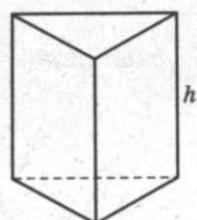
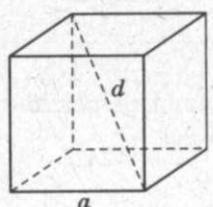
Многогранники

Куб

$$d = a\sqrt{3};$$

$$S_{\text{п}} = 6a^2;$$

$$V = a^3.$$

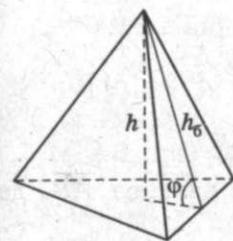


Пряма призма

$$S_{\text{п}} = S_6 + 2S_o;$$

$$S_6 = P_o \cdot h;$$

$$V = S_o \cdot h.$$



Піраміда

$$S_{\text{п}} = S_6 + S_o;$$

$$V = \frac{1}{3} S_o \cdot h.$$

Для правильної піраміди $S_6 = \frac{1}{2} P_o \cdot h_6$, де h_6 – апофема.

$$S_6 = \frac{S_o}{\cos \varphi}.$$

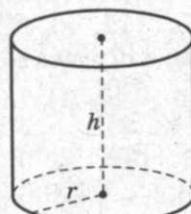
Тіла обертання

Циліндр

$$S_6 = 2\pi r h;$$

$$S_{\text{п}} = 2\pi r h + 2\pi r^2;$$

$$V = \pi r^2 h.$$

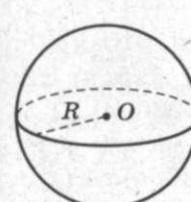


Конус

$$S_6 = \pi r l;$$

$$S_{\text{п}} = \pi r l + \pi r^2;$$

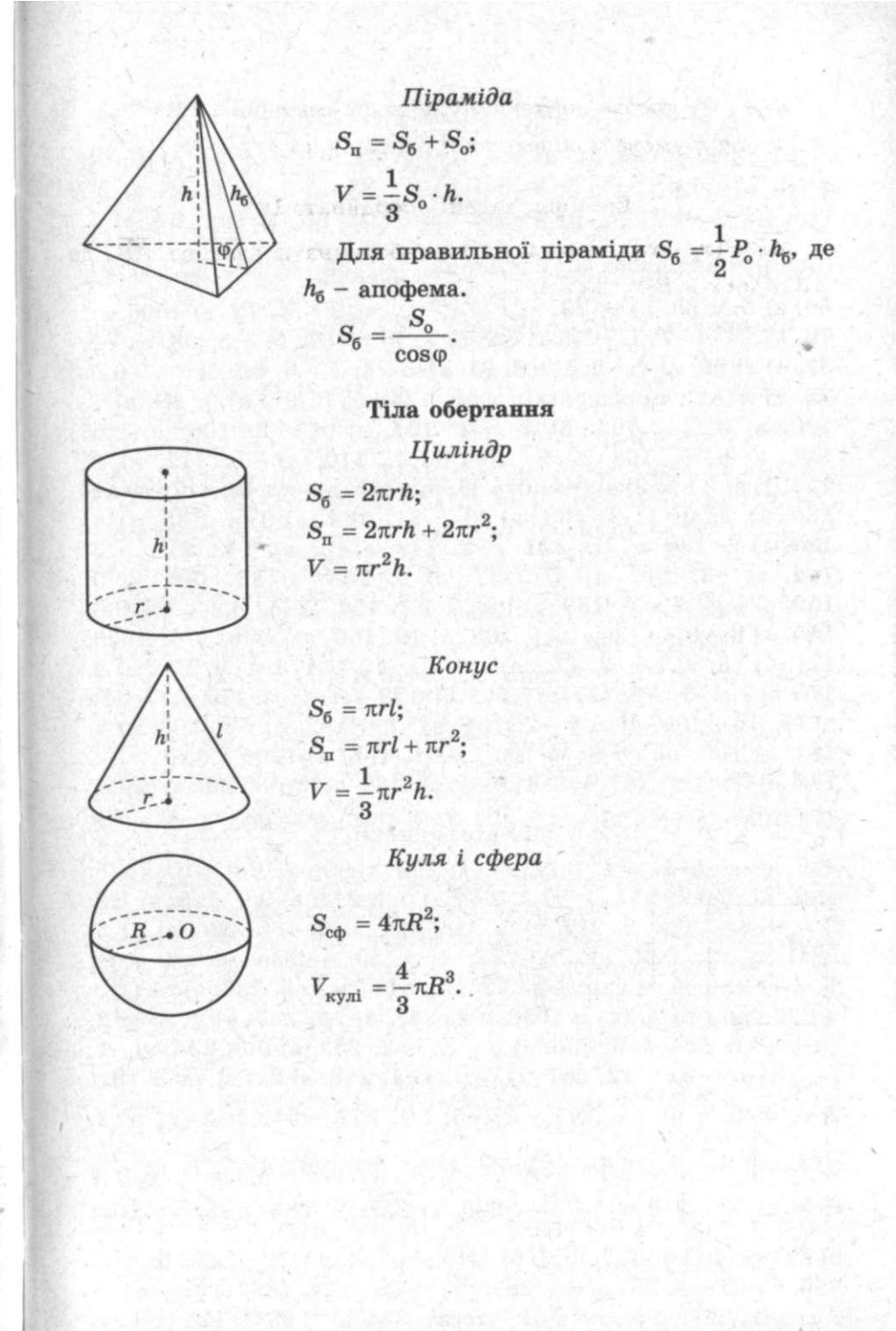
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



Куля і сфера

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2;$$

$$V_{\text{кул}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



ВІДПОВІДІ

11. б) 5215 грн. 15. а) $x \geq 0$; г) R . 23. г) $[2; \infty)$. 24. б) $[0; \infty)$; в) R . 27. б) $a^2 + 4a + 3$. 33. 10 хв. 35. а) 3; б) 1. 48. а) 2^3 ; г) 2^{-2} . 50. а) 4. 53. а) $x = 1$. 62. а) Hi. 63. а) Так. 64. а) 3. 65. б) Найбільше 3, найменше $\frac{1}{27}$. 66. а) $3^{\frac{3}{4}}$. 67. в) $3^{\frac{5}{3}}$. 68. в) 0,5. 69. а) 2. 73. а) $x = 4$; $x > 4$; $x \leq 4$. 75. а) 1000 м^2 . 76. а) 24 А. 77. а) 2,6 г. 86. а) 2; в) 0. 87. б) 1,5. 88. а) -2. 89. а) 2. 90. а) $x = 3$; $x \geq 3$. 91. в) $x = 4$; $x > 4$. 92. б) $x \leq -0,5$. 95. а) $x \geq 2$; в) розв'язків немає. 96. а) 3. 97. а) 0. 98. а) 1. 100. а) 0 і 1. 102. а) $x > 2$. 104. а) $x > 2$. 106. а) 2,5. 107. а) 0,75. 108. а) 3. 109. б) 1. 110. а) -1. 111. а) 2. 113. 1) а) 0 і 1; 2) а) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. 115. а) $(-\infty; 0)$. 117. 20 хв. 130. 1; 2; 3; 1; 3. 133. а) $3^4 = 81$. 134. а) Так. 135. а) 4. 136. а) 2. 140. а) Hi. 141. а) 2. 142. а) $(0; \infty)$. 143. а) $x > 3$. 144. а) -3. 146. а) 81. 147. а) 9. 148. а) 35. 149. а) 9. 152. а) $\log_{0,5} 5 < 0$. 153. а) $\log_{49} 3 < 1$. 154. а) $\log_2 0,4 < \log_2 0,6$. 155. а) $\log_2 0,4 < \log_{0,2} 0,4$. 168. а) 19. 169. а) 5000. 170. а) 26. 171. а) -3; б) 1 і -2. 172. а) -4; 6) -1 і 4. 173. а) 9. 174. а) 2. 175. а) 7. 176. а) 6. 177. а) $(-5; 1,5)$. 178. а) $(-4; 4)$. 179. а) $(7; 34)$; в) $(7; 16)$. 180. а) $x > -2$. 181. а) 169. 182. б) 5^{10} . 183. а) 5. 184. а) 100; в) 4 і 8; г) 100 і 0,01. 185. в) 1000 і 0,01; г) 4. 186. а) 9 і 1,25. 187. а) 9. 188. а) $(-1; 189. а) (6; \infty)$. 190. а) $(7; \infty)$. 191. а) $(5,5; 7]$. 192. а) $(1; 3^{\frac{2}{3}})$. 193. б) $(\frac{1}{3}; 27)$. 206. а) 0; в) 12. 207. а) -3; б) 3. 208. а) 22; в) -7. 209. а) 90; в) 10,5. 210. а) 45; в) 0. 211. а) 2. 212. а) -0,2. 213. а) 0,3. 214. а) 0,9. 215. а) 1,2; 0,1. 216. а) 0,2; 2. 217. а) 0. 218. а) 1. 219. а) 0. 220. а) -1,5. 221. а) -8. 222. а) $2x$. 224. а) ≈ 50 мишей за тиждень; б) ≈ 30 мишей за тиждень. 225. а) ≈ 11 км/год. 227. а) $\Delta K(x) = 600$ грн.; б) $\Delta R(x) = 1552$ грн. 245. а) -4. 247. а) 0; 8; -12. 248. а) 3. 249. а) 5. 250. а) $y = 3x - 2$. 253. а) 0,5. 254. а) -1. 257. а) $y = -6x - 12$. 267. в) $2x^5$; г) -1. 268. а) $2x$; в) $4x^3 + 18x$. 269. а) $6x^2$; в) $\frac{2}{3}x$. 271. -3; -5; -9. 272. -94; 2; $24\sqrt{2} + 2$. 274. а) $2\cos x$. 275. а) $2x - \sin x$. 276. б) 8. 277. а) -1. 278. а) $7e^x$. 279. г) $\frac{2}{x \ln 10}$. 280. а) $2,5x^{1,5}$. 281. а) $5x^4 - 10x$; в) $2x + 1$. 283. а) $7x^6 - 6x^2$; б) $5x^4$; в) $3x^2 - 2x - 7$; г) $3x^2 - 6x + 2$. 286. $y = 4x - 9$. 287. $y = 1$. 288. $y = -94x - 144$. 289. а) $3x^2 \cos x -$

298. а) $-\frac{2}{(x+1)^2}$. 300. а) $2e$. 301. а) $2e$. 302. а) 1. 303. б) $y = x + 1$.

304. а) $y = 2e^{-1}x$. 305. б) 0. 307. а) $y = -x + \pi - 1$. 314. а) $f(g(x)) = (2x + 7)^2$. 315. в) $f(g(x)) = \sin(3x + 4)$. 316. а) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 10$. 318. а) $20(x+3)^{19}$. 320. а) $4\cos 4x$. 321. а) $3\cos 3x$.

322. а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. 323. б) $e^{\sin x} \cdot \cos x$. 325. а) $\sin 2x + 2x \cos 2x$.

326. а) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$; в) $\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x-1)(x+2)}}$. 327. а) $4\sin^3 x \cos x$. 328. а) $\sqrt{3}$.

329. а) 2. 330. б) 40. 333. а) $y = -3x + 0,75\pi$. 334. а) $-2\sin 2x$.

336. а) $\frac{9}{3x-4}$. 346. а) 0 і 1. 347. б) 0,5. 348. а) 0.

354. а) Зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; \infty)$. 355. а) Зростає на $[-1; 0]$ і $[1; \infty)$. 356. а) Спадає на $[-1; 3]$. 357. а) $x = -0,5$ – точка мінімуму. 358. а) $x = 0$ – точка максимуму. 359. а) $x = 0$ – точка мінімуму, $x = -1$ – точка максимуму. 360. а) $x = \frac{1}{7}$ – точка мінімуму. 361. а) $x = 1$ – точка мінімуму, $x = -1$ – точка максимуму. 362. а) Точок екстремуму немає. 367. а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ –

точки мінімуму, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ – точки максимуму (при кожному $n \in Z$). 369. а) $y_{\max} = y(0) = 2$. 374. а) $y_{\min} = y(0) = 0$. 388. 21; -4.

389. 56; -56. 390. а) 6; -19. 391. -0,5. 392. 1024. 396. 200 × 200 (м).

397. 1200 м. 399. а) 1) $\sqrt{20}$, 0; б) 1) 5; 2. 400. а) Hi; б) ні.

401. а) $[-2; \infty)$. 402. б) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. 403. $XM = \sqrt{3}$.

404. Квадрат. Другий спосіб геометричний. Доведіть, що площа прямокутного трикутника, вписаного в коло, найбільша тоді, коли він рівнобедрений. 405. Квадрат. 406. 4 м, 4 м і 2 м. 407. Якщо діаметр основи циліндра x , а висота y ,

то його об'єм $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y = 1$, звідки $y = \frac{4}{\pi x^2}$. Площа поверхні

$$S = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)y. \text{ Її значення найменше, коли } x = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}.$$

У цьому разі $r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$; $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$. 416. а) 10 м/с. 417. а) $v(t) = 8t + 3$; б) $a(t) = 8$; в) $v(5) = 43$ м/с; $a(5) = 8$ м/с².

418. а) $v(t) = (6t + 4)$ рад/с. 419. а) 16 м/с; 42 м/с². 420. Через $6\frac{2}{3}$ с.

421. 4 град/с. 422. $\frac{13}{12}$ г/год. 424. $t = 1$ с. 428. 1А. 429. $t = 9$ с. 430. а) 4м/с і 2 м/с. 431. а) 36 м/с². 433. а) 20 м/с; б) 4с; в) 80 м. 443. $(x^4)' = 4x^3$; так. 448. а) $3x + C$; в) $x^3 + C$. 449. а) $C - x^5$. 450. а) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + C$. 454. а) $5x + x^3 + C$. 455. а) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$. 462. а) $x + 0,1x^{10} + C$. 463. а) $-2\cos x + C$. 464. б) $-e^{-x} + C$. 465. а) $15x^4$. 466. б) $0,5x^2 + \operatorname{tg} x - 3$. 467. в) $-\cos x + 1,5$. 468. а) $v(t) = 4t^2 + 20$. 469. а) $s(t) = t^3 + 4$. 471. а) Так. 472. в) $0,4e^{5x-1}$. 475. а) $-0,1\sin 10x$. 477. б) $x + 0,5\sin 2x$. 488. а) 4 кв. од. 489. а) $6\frac{2}{3}$ кв. од. 490. а) 27 кв. од. 493. а) $8\frac{2}{3}$ кв. од. 494. а) 1 кв. од. 495. а) 6 кв. од. 496. а) $\pi + 4$ кв. од. 497. а) 6,4. 498. Один із способів – за формулою площі трапеції; її основи 4 і 6, а висота 4. 499. а) 0,25. 503. $10\frac{2}{3}$ кв. од. 504. а) 36. 505. а) $\frac{3}{8}$. 506. а) 4,5 кв. од. 507. а) $10\frac{2}{3}$. 513. а) 0,5. 516. б, с, а. 517. а) 1. 518. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 519. а) $\frac{2}{3}$. 520. а) $e - 1$. 521. б) 1 кв. од. 522. а) $3\frac{3}{4}$ кв. од. 523. в) $(12 + \ln 81)$ кв. од. 524. б) 1,75. 525. в) 2. 526. б) 8. 527. а) π . 529. а) $\frac{4}{3}$ кв. од. 531. а) $\left(\frac{3}{\ln 2} - 2\right)$ кв. од. 532. Так. 536. 6 кв. од. 537. 12 кв. од. 541. 117π куб. од. 542. $0,2\pi$ куб. од. 545. 198 м. 546. 80 м. 547. 10 м. 548. 4,5. 549. $2\frac{2}{3}$. 550. 12 π. 551. 24 π. 552. 0,125 Дж. 553. 0,784 Дж. 554. ≈ 1177 м. 556. 9,5 м. 557. 48 Кл. 578. а) $\{-2; 0; 2\}$. 579. а) $(-\infty; 4)$. 582. а) $[0; 49]$. 583. $K \cap P = \{a; c; 2\}$, $K \setminus P = \{b\}$. 590. Пара $(4; -1)$. 591. $A \cap B$ – множина чисел, кратних 6. 592. $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = N$, $A \setminus B = A$. 605. а) 3 628 800; б) 6 227 020 800. 606. а) $(n + 1)!$; б) $n!$; в) $n + 1$; г) $(n - 1)!$. 608. 24. 611. 120. 612. 6; 24. 613. 20 160. 615. а) 30 240; б) 1716. 618. а) 8; б) 10. 622. 24. 624. 240. 625. 3600. 626. 24. 636. xy , xz , xt , yz , yt , zt . 639. а) 120; г) 5040. 641. 720. 642. 2520. 643. 6. 644. 18. 646. 30 240. 647. а) 60. 651. 190. 652. 496. 653. 28. 654. $0,5n(n - 1)$. 655. 35; $0,5n(n - 3)$. 657. 648. 658. 60. 659. 20. 660. 60. 662. а) 7. 664. а) 10. 666. $C_{28}^7 \cdot C_{27}^7 \cdot C_{14}^7$. 667. C_{49}^6 . 674. Мода 32, медіана 31,5. 675. Розмах 3, медіана 2, мода 1. 676. б) У 3 рази.

678. Розмах 4, мода 3, медіана 3. 681. 50,5. 682. $4\frac{1}{3}$; 5 і 4,5. 684. 528 г. 687. Так. 688. 2,7 %. 689. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$; $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$. 690. Середні квадратичні $\sqrt{0,116}$; $\sqrt{0,142}$; $\sqrt{0,134}$. Найкраще завдання виконав перший фрезерувальник. 724. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$. 725. а) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{1}{28}$. 728. а) 0; б) 0; в) 1. 730. $\frac{54}{125}; \frac{36}{125}; \frac{8}{125}$. 731. а) 0,3; б) 0,2. 733. а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$. 734. $\frac{1}{24}$. 735. $\frac{1}{1296}$. 736. $\frac{1}{24}$. 737. $\frac{1}{2520}$. 738. а) $\frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{10}$. 740. $\frac{5}{9}$. 741. а) $\frac{60}{253}$; б) $\frac{15}{253}$. 742. а) $\frac{1}{330}$; б) $\frac{33}{236}$. 743. а) $\frac{33}{59}$; б) $\frac{45}{118}$. 746. а) $\frac{5}{9}$. 748. а) 3 числа з 49; б) ймовірності рівні, бо $C_{15}^7 = C_{15}^8$. 758. $M(\zeta) = 4,5$. 759. В останній клітинці має бути $\frac{1}{4}$; $M(\zeta) = 3\frac{5}{6}$. 760. $M(\zeta) = 350$ грн. 761. $M(\phi) = 2,5$; $D(\phi) \approx 2,92$. Така випадкова величина відповідає, наприклад, випаданню очок під час підкидання правильного грального кубика. 764. $D(y) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E(y) = \{1; 6; 15; 20\}$. 774. $M(2; -2; 5)$. 779. а) (0; 1; 8). 780. а) Так. 783. $B(-4; 7; 24)$. 784. $A(8; 18; -8)$. 785. а) Так. 786. а) $D(-5; 9; 2)$. 787. $C(3; -8; 6)$. 788. $3\sqrt{6}$. 790. Hi . 791. $3\sqrt{38}$. 792. -4. 793. $M(0; -2; 0)$. 794. $3\sqrt{2}$. 796. а) $P = 15\sqrt{2}$; $S = 12,5\sqrt{3}$. 811. $\overrightarrow{AB} = (2; 5; 3)$, $\overrightarrow{BA} = (-2; -5; -3)$. 814. а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{41}$. 815. 3 або -3. 816. $\bar{a} = (3; 6; -3)$ або $\bar{a} = (-3; -6; 3)$. 819. а) \overrightarrow{CP} ; б) \overrightarrow{AT} ; в) \overrightarrow{AE} ; г) \overrightarrow{O} . 820. а) $3\bar{a} = (9; -12; 6)$. 822. $|3\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{123}$. 824. а) $m = -5$. 825. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2; -1; -6)$. 834. а) -6. 835. б) 130° . 837. б) -18. 839. а) 0. 843. а) $x = -9$. 844. $D(0; 0; 1)$. 845. $\cos x = \frac{4}{9}$. 852. $5x - 3z + 2 = 0$. 853. $ax + by + cz = 0$. 854. а) $3x - 4y + 7z + 26 = 0$. 856. $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 18$. 871. Так. 872. $4\sqrt{3}$ см². 874. а) a ; б) $a\sqrt{2}$. 876. 18 м². 878. $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$. 885. $5(2\sqrt{3} + 1)$. 898. 4 см. 899. в) $4ab$. 900. $2,25\sqrt{3}$ см. 903. а) 1464 см². 904. $6a^2 \sin \alpha$. 905. 13 см.

906. 192 см^2 . 907. 5 см, 10 см і 15 см. 908. $\approx 285 \text{ мм}$. 909. 6 см, 7 см і 12 см. 912. 4 см. 914. Hi . 916. $2\sqrt{2}S$. 919. 45° .
 920. а) $2a(a + 2h)$. 921. $l \sin \alpha$. 922. а) $d^2 \sin \varphi \cos \varphi$. 926. $5\sqrt{13} \text{ см}$. Розгляньте розгорнутку призми. 932. Ребер $2n$, вершин і граней по $n + 1$. 933. Hi . 938. 5 см. 939. 100 см^2 . 940. а) $b \sin \alpha$; б) $2b \cos \alpha$. 942. б) $3l \cos \alpha$; г) $3\sqrt{3}l^2(\cos \alpha + \cos^2 \alpha)$.
 943. $\approx 42^\circ$. 944. 24 см. 945. 125. 946. а) $128\sqrt{3}$. 947. а) $\frac{a^2}{\cos \alpha} + a^2$.
 949. $5\sqrt{3} \text{ см}$. 950. $\frac{25\sqrt{2}}{8} \text{ см}$. 953. 30° . 954. $0,25Q$. 955. 16 см^2 .
 959. $2(3 + \sqrt{3})$. 960. 36 дм^2 ; $\approx 35 \text{ дм}^2$. 961. a^2 . 974. $2 : \sqrt{2}$.
 975. а) Так. 976. а) Hi ; б) так; в) ні. 978. а) 864 см^2 . 979. 6) 0,5 м.
 980. б) У 4 рази. 984. $2\sqrt{3}a^2$. 985. $b\sqrt{2}$. 987. 16 см²; $8\sqrt{2} \text{ см}^2$.
 991. У 9 разів. 992. Можна. 995. $\arccos \frac{1}{3}$; 90° . 1005. Одна; безліч. Так. 1006. Безліч. Так. 1008. 4 см². 1009. $40\pi \text{ см}^2$.
 1011. $H : r = 2 : 1$. 1012. а) 24 м; г) 290π . 1013. б) 3 см.
 1016. πS . 1018. $2\pi r^2 \operatorname{tg} \alpha$. 1019. $\frac{\pi}{2}d^2 \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)$. 1020. $2 : \sqrt{3}$.
 1023. rh . 1024. $\sqrt{\frac{10}{\pi}} ; \frac{15}{\sqrt{10\pi}}$. 1025. $Q : 4\pi$. 1029. $\approx 3,3 \text{ м}^2$.
 1030. Hi . 1038. Конус. 1039. 10 м. 1040. 5 см; $5\sqrt{3} \text{ см}$.
 1041. 90° . 1042. $24\pi \text{ см}^2$. 1045. а) $l \sin \alpha$; в) $l^2 \sin \alpha \cos \alpha$.
 1046. $\sqrt{2}\pi R^2$. 1047. $8\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$. 1050. $90\pi \text{ см}^2$. 1052. $\sqrt{3} \text{ см}$. 1054. Hi , якщо висота конуса менша від радіуса основи. 1056. а) $0,5R$.
 1057. $\pi \text{ см}^2$. 1058. $0,5h\sqrt{2}$. 1059. 60° . 1060. б) $24\pi \text{ см}^2$.
 1061. б) $\sqrt{2}\pi a^2$. 1070. $0,75\pi r^2$. 1071. $64\pi \text{ см}^2$. 1072. 30 см.
 1073. $R + r$ або $|R - r|$. 1074. Дві площини, паралельні даній площині і віддалені від неї на r ; б) сфера радіуса r з центром у даній точці. 1077. $\approx 0,5 \text{ дм}$. 1078. 20 г. 1079. $200\pi \text{ см}^2$.
 1085. а) 20 см. 1087. 1 дм. 1088. $\pi r^2 \cos^2 \alpha$. 1089. 10 см і 24 см.
 1090. 10 см або 70 см. 1091. 24 см. 1097. Ці відстані рівні.
 1119. $3\pi\sqrt{3} \text{ см}$. 1123. а) $Q : \pi r$. 1124. $r^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; $\approx 22 \text{ м}^2$.
 1125. а) $\frac{a}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 1126. г) $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{m} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 1127. $2r \sin^2 \alpha$.
 1138. $Q\sqrt{Q}$. 1139. $\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$. 1140. $6\sqrt[3]{V^2}$. 1145. 9 см. 1146. 30 дм.

1157. $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$. 1162. $4ar^2$. 1166. $\approx 3,8 \text{ дм}^3$.
 1167. $\approx 5,4 \text{ тис. м}^2$. 1179. $\frac{1}{6}d^2 h$. 1180. $\frac{\sqrt{2}}{6} \text{ дм}^3$. 1182. Прийміть за основу бічну грань піраміди. 1183. $\frac{1}{6}abc$.
 1184. а) $\frac{1}{3}b^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$. 1189. 6 см. 1191. У 8 разів.
 1196. $10\frac{2}{3}\pi \text{ см}^3$. 1198. $\frac{\pi}{6}a^3, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. 1199. 8 : 27. 1201. У 8 разів.
 1202. Так. 1204. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. 1205. $\frac{1}{3}abhs \in \varphi$. 1206. 112 см^3 .
 1212. $\approx 5,7 \text{ см}$. 1213. $\approx 42 \text{ см}$. 1218. $\approx 8,4 \text{ см}$. 1219. Менша від 4,18 т. 1220. 0,0004 мм. 1221. а) $3x$. 1222. а) 56; 42.
 1223. а) $4^3 < 3^4$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 < \left(\frac{4}{9}\right)^2$. 1226. Менший на $1\frac{33}{50}$.
 1227. $d = 2, a_{20} = 41, S_{20} = 440$. 1228. $q = 2, b_{10} = 1536, S_{10} = 3069$.
 1229. 4905. 1230. а) 42. 1231. 58. 1232. 21. 1233. Друга схема неправильна, бо 1 – ні просте, ні складене. 1237. а) Парна; б) парна. 1239. $y = 3x$. 1240. $y = 0,5x$. 1242. (3; 2). 1243. Так, усі дійсні числа $x \in (0; 180^\circ)$, де x – кут при вершині. 1244. $x = -7$, $y = 0$. 1245. а) 5; б) 0. 1246. $y = 0$. 1251. а) $\sin 1^\circ < \sin 3^\circ$; б) $\sin 1 > \sin 3$. 1252. а) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{2}$. 1253. $\cos 2, \operatorname{tg} 2, \cos 3$.
 1255. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. 1256. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. 1257. а) $\frac{\pi}{6}$.
 1258. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 1259. а) 0; в) $\cos^2 \alpha$. 1263. а) 0,8; б) $\frac{3}{4}$. 1271. $\frac{1}{8}; \frac{1}{9}$; $\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 1$. 1273. -27. 1274. а) $a^{-2} - 9$. 1275. 4; 27; 4; 1; $\frac{1}{3}$. 1277. \sqrt{m} , $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt{ab}, \sqrt[10]{p^2}$. 1278. $x^{\frac{1}{2}}, c^{\frac{1}{3}}, (xz)^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{5}}$. 1279. а) 2; б) 10.
 1280. $x - c^2$. 1281. а) 11. 1284. Hi . 1286. Так; так. 1287. $k = 2$.
 1288. Так. 1289. б)-г) Так. 1290. а) Спадна; б) зростаюча.
 1293. а) $x = 5$. 1296. а) Три; б) чотири. 1298. а) $a\sqrt{2}; a\sqrt{3}$. 1299. $\sqrt{2}$.
 1300. $\sqrt{42}$. 1301. (1; 5; 3). 1303. (-1; -2; -1); (1; 2; 1).
 1304. (-3; 1; 7); (3; 1; -3). 1306. а) 4; б) (-2; -2; 2; -2); (2; 2; 2; 2).
 1307. а) 0,5; б) -3; в) $\frac{1}{2}$. 1309. -2. 1310. Так. 1311. а) 1,5;

в) 1. 1312. -4; 0; 6. 1313. 1; -1; -1. 1314. а) $6x^2$; б) $5x^4 - 6x$.
 1315. а) -1; 1. 1316. а) $x \in (1; +\infty)$ – зростає, $x \in (-\infty; 1)$ – спадає. 1317. а) $x_{\max} = \frac{1}{2}$. 1318. Так. 1321. а) $\max_{[-5; 0]} f(x) = f(-5) = 55$,

$\min_{[-5; 0]} f(x) = f(3) = -9$. 1322. $-\frac{1}{2}$. 1323. $5\sqrt{2}$. 1324. Куб з ребром 1 м.

1326. $y = \frac{x^3}{3} + 8\frac{2}{3}$. 1327. а) $\frac{x^4}{4} + 2x + C$. 1328. $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 3\frac{2}{3}$.

1329. а) $2\frac{2}{3}$ кв. од. 1330. а) 9; б) 0. 1331. 36 кв. од. 1332. $1\frac{1}{3}$ кв. од.

1335. 300 см^2 . 1336. $4\sqrt{3} \text{ дм}^2$. 1339. $\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1340. $216\pi \text{ см}^2$.

1341. $4\pi a^2$. 1342. Так. 1343. 17,5 см, 17,5 см. 1344. Ні.

1345. а) Навпіл; б) 1:4. 1346. $40\pi \text{ см}$. 1347. Ні. 1348. 1 : 4.

1349. а) $m^2 : n^2$; б) $m^3 : n^3$. 1350. $40\sqrt{5} \text{ см}^3$. 1351. $54\sqrt{3} \text{ дм}^3$.

1352. $144\pi \text{ дм}^3$. 1353. б) 4 : 9. 1354. а) $\pi \text{ м}^2$. 1355. У 4 рази;

у 8 разів. 1356. $8\pi\sqrt{2} \text{ дм}^2$, $\frac{16}{3}\pi \text{ дм}^3$. 1357. Розгляньте усно

10 випадків. 1358. г) Число *3* ділиться на 5 і 9, тому

остання цифра – 5 або 0, а сума цифр ділиться на 9.

1359. а) КУТ = 289; б) розв'язку немає. 1360. Через 59 хв.

1361. Понад 2^{33} , що більше 8 млрд. Такої кількості людей не

існувало. 1362. ≈ 232 р. Рівняння $1,01^x = 10$ розв'яжіть методом випробувань, користуючись калькулятором. 1363. 1480.

1364. Таке число має вигляд $3n + 1$, де n – число натуральне.

А число $(3n + 1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1$ при діленні на 9

дає в остачі 1. 1366. Висота циліндра дорівнює половині радіуса його основи. 1367. На 1 день. 1368. Не існують.

ЗМІСТ

Передмова	3
-----------------	---

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. Показникові та логарифмічні функції	5
§ 1. Функції та їх основні властивості	6
§ 2. Степеневі та показникові функції	14
§ 3. Показникові рівняння та нерівності	23
§ 4. Логарифми та логарифмічні функції	30
§ 5. Логарифмічні рівняння та нерівності	37
<i>Самостійна робота № 1</i>	44
Історичні відомості	45
Головне в розділі 1	46
Розділ 2. Похідна та її застосування	49
§ 6. Границя функції	50
§ 7. Дотична до графіка функції. Похідна	58
§ 8. Диференціювання функцій	65
§ 9. Похідна складеної функції	72
<i>Самостійна робота № 2</i>	77
§ 10. Застосування похідної для дослідження функцій	78
§ 11. Найбільші та найменші значення функції	86
§ 12. Похідна як швидкість	91
<i>Самостійна робота № 3</i>	97
Історичні відомості	97
Головне в розділі 2	98
Розділ 3. Інтеграл та його застосування	100
§ 13. Первісна	101
§ 14. Площа підграфіка	107
§ 15. Інтеграл	112
§ 16. Застосування інтегралів	121
<i>Самостійна робота № 4</i>	127
Історичні відомості	127
Головне в розділі 3	130
Розділ 4. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики	132
§ 17. Множини та підмножини	133
§ 18. Комбінаторика та правило добутку	138
§ 19. Розміщення, перестановки та комбінації	144
§ 20. Елементи статистики	149
§ 21. Графічні подання інформації про вибірки	155

§ 22. Випадкові події та їх імовірності	165
§ 23. Відносна частота події та випадкові величини	175
Самостійна робота № 5	181
Історичні відомості	182
Головне в розділі 4	185

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 5. Координати і вектори у просторі	188
§ 24. Координати в просторі	189
§ 25. Вектори в просторі	194
§ 26. Застосування векторів	200
Самостійна робота № 6	206
Історичні відомості	207
Головне в розділі 5	208

Розділ 6. Геометричні тіла. Об'єми та площини поверхонь геометричних тіл	210
§ 27. Геометричні тіла та многогранники	211
§ 28. Призми	217
§ 29. Піраміди	224
§ 30. Правильні многогранники	230
Самостійна робота № 7	236
§ 31. Тіла обертання	237
§ 32. Конуси	244
§ 33. Куля і сфера	251
Самостійна робота № 8	257
§ 34. Комбінації геометричних фігур	257
§ 35. Об'єм призми та циліндра	262
§ 36. Об'єм піраміди, конуса та кулі	268
Самостійна робота № 9	276
Історичні відомості	276
Головне в розділі 6	278

ДОДАТКОВІ ЗАВДАННЯ

Числа і функції	281
Прямі та площини в просторі	286
Похідна та інтеграл	287
Геометричні тіла	289
Задачі для кмітливих	290
Теми для завдань творчого характеру	293
Рекомендована література	294
Предметний покажчик	295
Довідковий матеріал	298
Відповіді	310

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович

БЕВЗ Валентина Григорівна

МАТЕМАТИКА

Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактори Олександр Грищенко, Наталія Дащко
Обкладинка, макет, ілюстрації Василя Марущинця

Технічний редактор Цесаріна Федосіхіна

Комп'ютерна верстка Юрія Лебедєва

Коректори Інна Іванюсь, Любов Федоренко

Формат 60×90/₁₆.
Умовн. друк. арк. 20,0. Обл.-вид. арк. 19,25.
Тираж 40048 пр. Вид. № 1109.
Зам. № 11-0127.

Видавництво «Генеза»,
вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано з готових діапозитів у ТОВ «ПЕТ»
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
До державного реєстру видавців серія ДК № 3179

Координати

точок	середини відрізка AB	Відстань між точками
$A(a), B(b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$AB = b-a = \sqrt{(b-a)^2}$
$A(a_1; a_2)$ $B(b_1; b_2)$	$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2},$ $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$	$AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$
$A(a_1; a_2; a_3)$ $B(b_1; b_2; b_3)$	$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2},$ $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2},$ $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$	$AB = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$

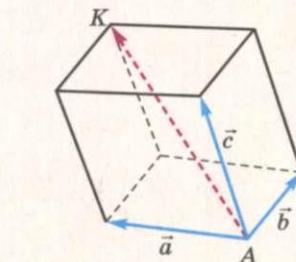
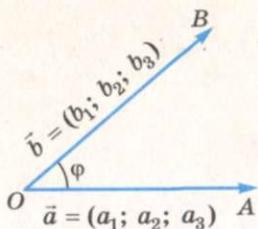
Вектори

Якщо $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AK}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{AK}\end{aligned}$$

Геометричні тіла

Назва	Тіло	Площа поверхні	Об'єм
Прямоугільний паралелепіпед		$S = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Призма		$S = S_6 + 2S_o$	$V = S_o h$
Піраміда		$S = S_6 + S_o$	$V = \frac{1}{3}S_o h$
Циліндр		$S = 2\pi r(r + h)$	$V = \pi r^2 h$
Конус		$S = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Куля		$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$